

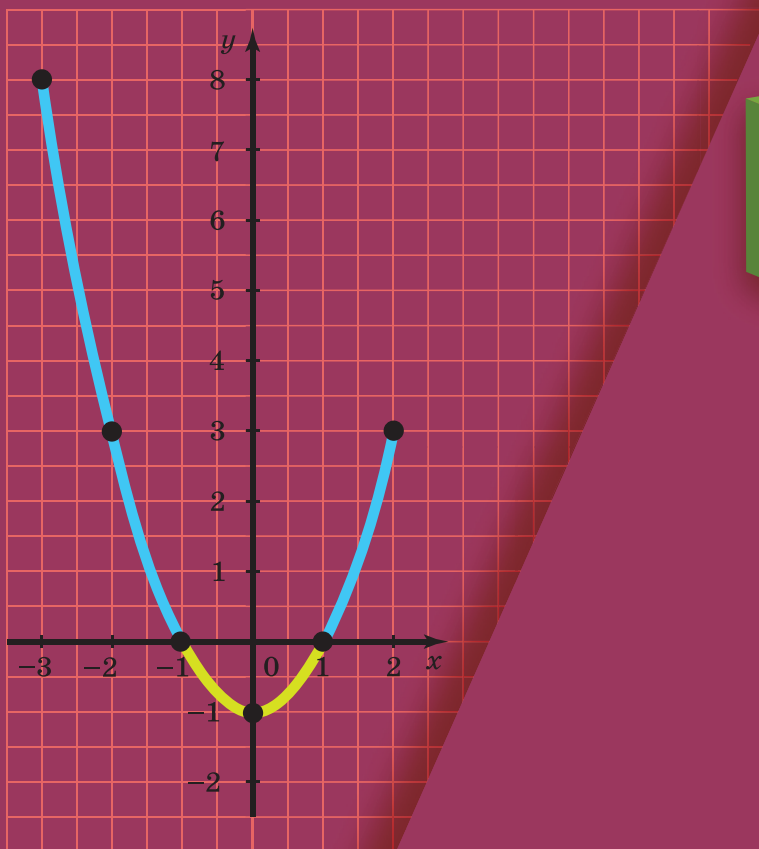


НОВА УКРАЇНЬСЬКА ШКОЛА

Олександр Істер

АЛГЕБРА

ЧАСТИНА 2



КВАДРАТИ І КУБИ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 1 ДО 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

СТЕПЕНІ ЧИСЕЛ 2 ТА 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ФУНКЦІЯ

Якщо кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, то таку залежність називають **функціональною залежністю**, або **функцією**.

ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють **область визначення функції**.

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ

Усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють **область значень функції**.

ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Графіком функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

Лінійною називають функцію вигляду $y = kx + l$, де x – незалежна змінна, k і l – деякі числа.

Графіком будь-якої лінійної функції є **пряма**.

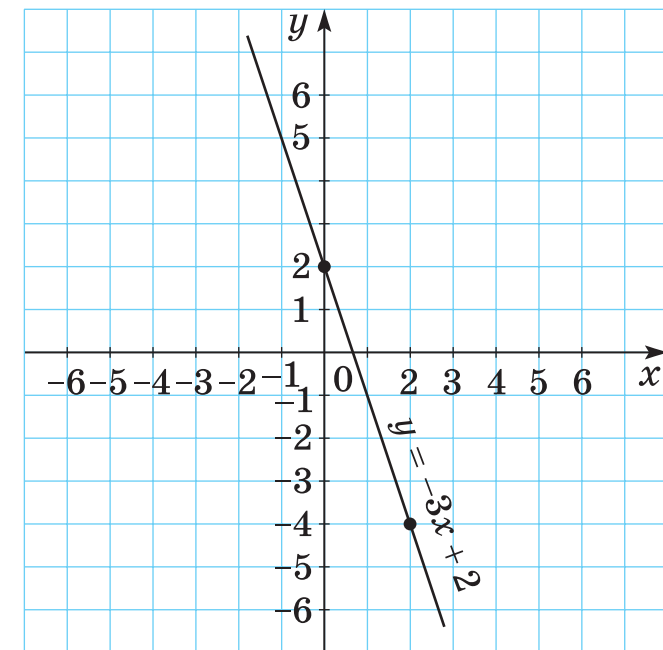
Для побудови графіка лінійної функції достатньо знайти координати двох точок графіка.

Пряма вигляду $y = l$ паралельна осі x .

ГРАФІК ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

$$y = -3x + 2$$

x	0	2
y	2	-4



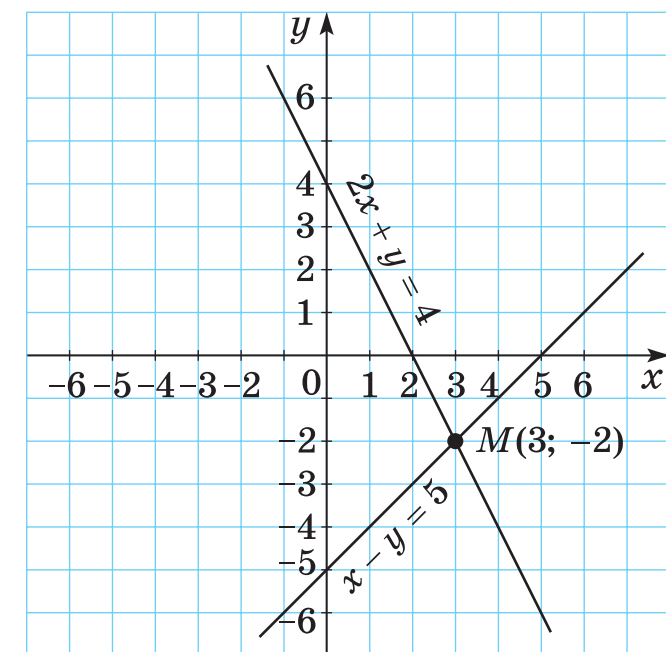
ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(3; -2) \\ x = 3; y = -2 \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 3 - (-2) = 5, \\ 2 \cdot 3 + (-2) = 4. \end{cases}$$



ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

АЛГЕБРА

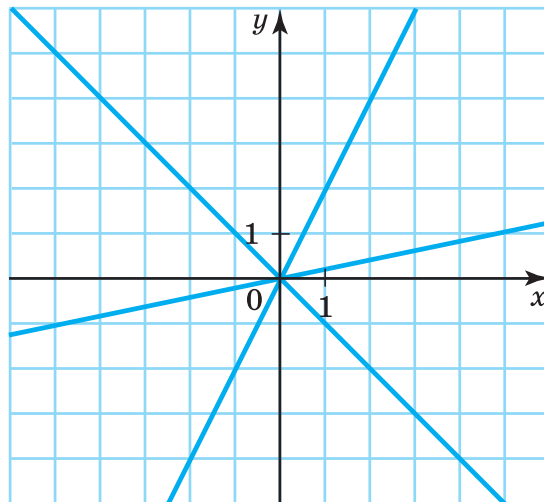
Підручник для осіб
з особливими освітніми потребами
(Н 54.1–Н 54.2)

7 клас

(у 2 частинах)

ЧАСТИНА 2

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України



Київ
«Генеза»
2024

УДК 512*кл7(075.3.056.262)
І-89

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 № 124)*

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

*Відповідає модельній навчальній програмі «Алгебра. 7–9 класи»
для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.)*

Істер О. С.

І-89 Алгебра : підруч. для осіб з особливими освіт.
потребами (Н 54.1–Н 54.2) : 7-й кл. (У 2 ч.). Ч. 2 /
Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2024. — 192 с. : іл.

ISBN 978-617-8353-54-4

ISBN 978-617-8353-56-8 (ч. 2)

УДК 512*кл7(075.3.056.262)

ISBN 978-617-8353-54-4
ISBN 978-617-8353-56-8 (ч. 2)

© Істер О. С., 2024
© «Генеза»,
оригінал-макет, 2024

§ 18. Множення різниці двох виразів на їх суму

Формула множення різниці двох виразів на їх суму

Помножимо різницю $a - b$ на суму $a + b$:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отже,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Отримали ще одну формулу скороченого множення, яку читають так:

добуток різниці двох виразів на їх суму дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Розглянемо приклади застосування цієї формули.

Приклад 1. Виконати множення:

1) $(2t - 3p)(2t + 3p)$;

2) $(4a^2 + b^3)(b^3 - 4a^2)$.

Розв'язання.

1) $(2t - 3p)(2t + 3p) = (2t)^2 - (3p)^2 = 4t^2 - 9p^2$ або скорочено: $(2t - 3p)(2t + 3p) = 4t^2 - 9p^2$.

2) $(4a^2 + b^3)(b^3 - 4a^2) = (b^3 + 4a^2)(b^3 - 4a^2) = (b^3)^2 - (4a^2)^2 = b^6 - 16a^4$.

Відповідь: 1) $4t^2 - 9p^2$; 2) $b^6 - 16a^4$.

Приклад 2. Подати добуток $(-5t - 7a)(5t - 7a)$ у вигляді многочлена.

Розв'язання.

1-й спосіб. Винесемо у виразі $-5t - 7a$ за дужки число -1 .
Матимемо:

$$\begin{aligned}(-5m - 7a)(5m - 7a) &= -1 \cdot (5m + 7a)(5m - 7a) = -((5m)^2 - (7a)^2) = \\ &= -(25m^2 - 49a^2) = -25m^2 + 49a^2 = 49a^2 - 25m^2.\end{aligned}$$

2-й спосіб. У кожному із множників спочатку поміняємо місцями доданки:

$$\begin{aligned}(-5m - 7a)(5m - 7a) &= (-7a - 5m)(-7a + 5m) = (-7a)^2 - (5m)^2 = \\ &= 49a^2 - 25m^2.\end{aligned}$$

Відповідь: $49a^2 - 25m^2$.

Застосування формул множення різниці двох виразів на їх суму під час спрощення виразів

Приклад 3. Спростити вираз:

- 1) $-2m(m - 5)(m + 5)$;
- 2) $4x(x - 2) - (2x + 3)(2x - 3)$;
- 3) $(b^2 - 2)(b^2 + 2)(b^4 + 4)$.

Розв'язання.

$$1) -2m(m - 5)(m + 5) = -2m(m^2 - 5^2) = -2m(m^2 - 25) = -2m^3 + 50m = 50m - 2m^3.$$

$$2) 4x(x - 2) - (2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 8x - ((2x)^2 - 3^2) = 4x^2 - 8x - 4x^2 + 9 = 9 - 8x.$$

$$3) \text{ Застосуємо двічі поспіль формулу множення різниці двох виразів на їх суму. Маємо: } (b^2 - 2)(b^2 + 2)(b^4 + 4) = ((b^2)^2 - 2^2) \times (b^4 + 4) = (b^4 - 4)(b^4 + 4) = (b^4)^2 - 4^2 = b^8 - 16.$$

Відповідь: 1) $50m - 2m^3$; 2) $9 - 8x$; 3) $b^8 - 16$.

Застосування формули множення двох виразів на їх суму під час обчислення виразів

Приклад 4. Обчислити зручним способом $4,3 \cdot 3,7$.

Розв'язання.

$$4,3 \cdot 3,7 = (4 + 0,3)(4 - 0,3) = 4^2 - 0,3^2 = 16 - 0,09 = 15,91.$$

Відповідь: 15,91.

? Якому виразу дорівнює добуток різниці двох виразів на їх суму?
Запишіть і прочитайте відповідну формулу.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 748. (Усно.) Які з рівностей є тотожностями:

1) $(a - c)(a + c) = a^2 - c^2$; 2) $(m + p)(m - p) = m^2 + p^2$;
3) $(y - x)(y + x) = (y - x)^2$; 4) $(d + n)(d - n) = n^2 - d^2$?

749. Закінчіть запис:

1) $(c - 5)(c + 5) = c^2 - 5^2 = \dots$;
2) $(b + 7)(b - 7) = b^2 - 7^2 = \dots$.

750. Знайдіть добуток:

1) $(c - d)(c + d)$; 2) $(p + a)(p - a)$.

751. Виконайте множення двочленів:

1) $(b + t)(b - t)$; 2) $(a - t)(a + t)$.

2 752. Виконайте множення:

1) $(p - 9)(p + 9)$; 2) $(5 + x)(5 - x)$;
3) $(3 - c)(3 + c)$; 4) $(7 + y)(y - 7)$.

753. Перетворіть на многочлен:

1) $(m - 2)(m + 2)$; 2) $(7 + a)(7 - a)$;
3) $(4 - x)(4 + x)$; 4) $(11 + b)(b - 11)$.

754. Подайте добуток у вигляді многочлена:

1) $(2x - 3)(2x + 3)$; 2) $(3p + 8)(3p - 8)$;
3) $(4 + 5a)(5a - 4)$; 4) $(3m - 4p)(4p + 3m)$;
5) $(7a + 10b)(10b - 7a)$; 6) $\left(\frac{1}{4}p - \frac{1}{7}q\right)\left(\frac{1}{7}q + \frac{1}{4}p\right)$.

755. Виконайте множення:

1) $(p - 2m)(p + 2m)$; 2) $(2p + 7)(2p - 7)$;
3) $(2c + 5)(5 - 2c)$; 4) $(8a - 0,3x)(0,3x + 8a)$;
5) $(0,1p + q)(q - 0,1p)$; 6) $\left(\frac{2}{7}a - \frac{3}{5}b\right)\left(\frac{2}{7}a + \frac{3}{5}b\right)$.

756. Заповніть у зошиті таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Добуток різниці виразів I і II на їх суму	Різниця квадратів виразів I і II
$3a$	b	$(3a - b)(3a + b)$	$9a^2 - b^2$
$5m$	$2n$		
$\frac{1}{2}x$	$3y$		
$0,1p$	$0,7q$		
$\frac{1}{7}c$	$\frac{1}{3}d$		

757. Виконайте дії:

- 1) $16 + (3a + 4)(3a - 4)$;
- 2) $(5m - 3)(5m + 3) - 25m^2$.

758. Спростіть вираз:

- 1) $(8x - 5)(8x + 5) + 25$;
- 2) $9m^2 + (5 - 3m)(5 + 3m)$;
- 3) $(2b - 3)(3 + 2b) - 4b^2$;
- 4) $(4a + 7)(7 - 4a) - 49$.

759. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3x = (2x - 3)(2x + 3) - 4x^2$;
- 2) $9x^2 + (8 - 3x)(8 + 3x) = 4x$.

760. Знайдіть корені рівняння:

- 1) $8x = (5x - 4)(5x + 4) - 25x^2$;
- 2) $(9 - 4x)(9 + 4x) + 16x^2 = 3x$.

3 761. Обчисліть зручним способом:

- 1) $(40 - 1)(40 + 1)$;
- 2) $81 \cdot 79$;
- 3) $1002 \cdot 998$;
- 4) $1,03 \cdot 0,97$.

762. Знайдіть значення виразу зручним способом:

- 1) $(80 + 2)(80 - 2)$;
- 2) $59 \cdot 61$;
- 3) $108 \cdot 92$;
- 4) $12,3 \cdot 11,7$.

763. Подайте добуток у вигляді многочлена:

1) $(p^2 + 3q)(3q - p^2)$;

2) $(2a - m^3)(m^3 + 2a)$;

3) $(5a - b^2)(b^2 + 5a)$;

4) $(0,7m + n^2)(0,7m - n^2)$;

5) $(4t^2 - p^4)(4t^2 + p^4)$;

6) $(3a^3 - 4b^4)(4b^4 + 3a^3)$.

764. Виконайте множення:

1) $(1,7a - 1,4p^3)(1,4p^3 + 1,7a)$;

2) $\left(3a^2 - \frac{1}{4}b^3\right)\left(\frac{1}{4}b^3 + 3a^2\right)$;

3) $\left(5m^2n + \frac{1}{7}p^3\right)\left(\frac{1}{7}p^3 - 5m^2n\right)$;

4) $\left(\frac{2}{3}a^7 + 1,2y^8\right)\left(1,2y^8 - \frac{2}{3}a^7\right)$.

765. Виконайте множення:

1) $(5a + b^2)(b^2 - 5a)$;

2) $(4a^3 - d^2)(d^2 + 4a^3)$;

3) $(0,7p - m^7)(m^7 + 0,7p)$;

4) $\left(\frac{1}{5}m^2 + 3b^7\right)\left(3b^7 - \frac{1}{5}m^2\right)$;

5) $(0,2a^2b - 0,3ab^2)(0,2a^2b + 0,3ab^2)$;

6) $\left(1,2p^7 - \frac{2}{3}a^8\right)\left(\frac{2}{3}a^8 + 1,2p^7\right)$.

766. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(-a^2 + 7)(7 + a^2)$;

2) $(-p^2 - q^7)(p^2 - q^7)$;

3) $(-8m - 5p)(-8m + 5p)$;

4) $(-2a^3 - 3b)(-3b + 2a^3)$.

767. Спростіть вираз:

1) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$;

2) $(2a + x)(4a^2 + x^2)(2a - x)$;

3) $(c^3 + d^2)(c^3 - d^2)(d^4 + c^6)$;

4) $(-x - y)(x - y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$.

768. Перетворіть на многочлен:

- 1) $(-a^7 + b^5)(a^7 + b^5)$;
- 2) $(-0,1m^3 - p^4)(0,1m^3 - p^4)$;
- 3) $(3x - 2p)(3x + 2p)(9x^2 + 4p^2)$;
- 4) $(-a^2 - 5b^3)(a^2 - 5b^3)(a^4 + 25b^6)$.

769. Замість «зірочок» запишіть такі одночлени, щоб утворилася тотожність:

- 1) $(2a + *) (2a - *) = 4a^2 - 49b^2$;
- 2) $(* - 9p)(* + 9p) = 0,25m^4 - 81p^2$;
- 3) $100a^8 - 9b^6 = (* + 10a^4)(10a^4 - *)$;
- 4) $(4x - 3y)(* + *) = 16x^2 - 9y^2$.

770. Знайдіть корені рівняння:

- 1) $8x(1 + 2x) - (4x + 1)(4x - 1) = 17$;
- 2) $x - 12x(1 - 3x) = 14 - (5 - 6x)(6x + 5)$;
- 3) $(4x + 1)(4x - 1) + (2x - 3)^2 = 5x(4x - 11)$.

771. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $5x(4x - 1) - (6x - 1)(6x + 1) = (4x + 3)(3 - 4x)$;
- 2) $(3x - 4)(3x + 4) - (5x - 2)(5x + 2) = 2x(1 - 8x)$;
- 3) $(5x - 4)^2 - 2x(8x - 5) = (3x - 2)(3x + 2)$.

772. Спростіть вираз:

- 1) $(a + 3)^2 - (a + 3)(a - 3)$;
- 2) $(8x - 3y)(8x + 3y) - (3x - 8y)^2$;
- 3) $(b - 3)^2(b + 3)^2$;
- 4) $(a + 5)^2(5 - a)^2$.

773. Спростіть вираз:

- 1) $(c - 2)^2 - (c - 3)(c + 3)$;
- 2) $(9x - 2y)(9x + 2y) - (5x - 2y)^2$;
- 3) $(a + 6)^2(a - 6)^2$;
- 4) $(2 - m)^2(m + 2)^2$.

4 774. Доведіть, що квадрат будь-якого цілого числа завжди на одиницю більший за добуток попереднього йому й наступного за ним чисел.

775. Виконайте множення, використавши формули скороченого множення:

1) $((x + y) + 1)((x + y) - 1)$;

2) $(a + b + c)(a - (b + c))$;

3) $(m + n + 2p)(m + n - 2p)$;

4) $(x - y - 2)(x + y + 2)$.

Вправи для повторення

776. Обчисліть: $2,7 \cdot \left(8 \frac{7}{12} - 2 \frac{17}{36}\right) - 4 \frac{1}{3} : 0,65$.

777. Щоб заасфальтувати деяку ділянку дороги за певний час, бригада шляховиків мала асфальтувати по 15 м^2 щогодини. Натомість щогодини вони асфальтували на 3 м^2 більше, тому за 2 год до закінчення терміну їм залишилося заасфальтувати 12 м^2 . Якою була площа ділянки та скільки годин її мали асфальтувати?



Життєва математика

778. Коли українці обчислюють «індекс борщу», тобто ціну набору продуктів для приготування 5 л класичної української страви, то роблять це за одним із численних рецептів (див. мал.). Так, у 2019 році такий набір коштував у середньому 74,4 грн, при цьому мінімальна зарплата в Україні становила 4173 грн. У 2023 році згаданий набір коштував у середньому 99,2 грн, при цьому мінімальна зарплата в Україні становила 6700 грн. Скільки кастрюль борщу можна було зварити на мінімальну зарплату в 2023 році? Зробіть висновки.

На 5 літрів борщу:

300 г свинини

500 г картоплі

500 г буряка

200 г моркви

300 г капусти

200 г цибулі

90 г томатної пасти

30 г олії

200 г сметани



Цікаві задачі – поміркуй одначе

779. Нехай $a_1; a_2; a_3$ – натуральні числа, $b_1; b_2; b_3$ – ці самі числа, записані в іншому порядку. Доведіть, що добуток $|a_1 - b_1| \cdot |a_2 - b_2| \cdot |a_3 - b_3|$ є парним числом.

§ 19. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів

Формула різниці квадратів

У тотожності $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ поміняємо місцями ліву і праву частини. Матимемо:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Цю тотожність називають **формулою різниці квадратів** двох виразів та читають так:

різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на їх суму.

Формулу різниці квадратів двох виразів застосовують для розкладання на множники двочлена $a^2 - b^2$. Цю формулу можна використовувати і для розкладання на множники різниці квадратів будь-яких двох виразів.

Приклад 1. Розкласти на множники:

1) $16 - x^2$; 2) $49m^4 - 64p^6$.

Розв'язання. 1) Оскільки $16 = 4^2$, то за формулою різниці квадратів: $16 - x^2 = 4^2 - x^2 = (4 - x)(4 + x)$.

2) Оскільки $49m^4 = (7m^2)^2$, а $64p^6 = (8p^3)^2$, маємо:
 $49m^4 - 64p^6 = (7m^2)^2 - (8p^3)^2 = (7m^2 - 8p^3)(7m^2 + 8p^3)$.

Відповідь: 1) $(4 - x)(4 + x)$; 2) $(7m^2 - 8p^3)(7m^2 + 8p^3)$.

Приклад 2. Розкласти на множники $25x^2 - (1 - 2x)^2$.

Розв'язання. $25x^2 - (1 - 2x)^2 = (5x)^2 - (1 - 2x)^2 = (5x - (1 - 2x)) \times (5x + (1 - 2x)) = (5x - 1 + 2x)(5x + 1 - 2x) = (7x - 1)(3x + 1)$.

Відповідь: $(7x - 1)(3x + 1)$.

Обчислення значень виразів за допомогою формули різниці квадратів

Приклад 3. Обчислити $105^2 - 95^2$ зручним способом.

Розв'язання.

$$105^2 - 95^2 = (105 - 95)(105 + 95) = 10 \cdot 200 = 2000.$$

Відповідь: 2000.

Розв'язування рівнянь з використанням формули різниці квадратів

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x^2 - 25 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$, маємо:


$$x^2 - 25 = 0;$$

$$(x - 5)(x + 5) = 0;$$

$$x - 5 = 0 \quad \text{або} \quad x + 5 = 0;$$

$$\text{отже, } x = 5 \quad \text{або} \quad x = -5.$$

Відповідь: $-5; 5$.

 Прочитайте і запам'ятайте формулу різниці квадратів двох виразів.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 780. (Усно.) Які з рівностей є тотожностями:

1) $c^2 - d^2 = (c - d)(c - d)$;

2) $p^2 - t^2 = (p + t)(p - t)$;

3) $a^2 + b^2 = (a + b)(a + b)$;

4) $3^2 - b^2 = (3 - b)(3 + b)$?

781. Доберіть замість пропусків такий двочлен, щоб рівність перетворилася на тотожність:

1) $a^2 - 1 = (a - 1)(\dots)$; 2) $4 - m^2 = (\dots)(2 + m)$.

782. Доберіть замість пропусків такий вираз, щоб рівність перетворилася на тотожність:

1) $p^2 - 1 = (\dots)(p + 1)$; 2) $9 - c^2 = (3 - c)(\dots)$.

2 **783.** (Усно.) Розкладіть на множники:

1) $a^2 - 4$; 2) $36 - b^2$;
3) $4x^2 - 25m^2$; 4) $x^2y^2 - 1$.

784. Подайте многочлен у вигляді добутку різниці та суми:

1) $a^2 - 25$; 2) $16 - p^2$; 3) $d^2 - 1,44$;
4) $0,09 - m^2$; 5) $b^2 - \frac{4}{9}$; 6) $\frac{25}{36} - c^2$.

785. Розкладіть на множники:

1) $36a^2 - b^2$; 2) $-a^2 + b^2$; 3) $49x^2 - 64$;
4) $9m^2 - 16n^2$; 5) $-100m^2 + 121k^2$; 6) $0,25 - a^2b^2$;
7) $16m^2a^2 - 0,01$; 8) $p^2 - c^2d^2$; 9) $81p^2m^2 - n^2$.

786. Подайте многочлен у вигляді добутку різниці та суми:

1) $a^2 - 64$; 2) $0,25 - b^2$; 3) $-81 + 36x^2$;
4) $169p^2 - q^2$; 5) $400a^2 - 25m^2$; 6) $49a^2b^2 - 16$;
7) $900 - a^2b^2$; 8) $c^2d^2 - 4m^2$; 9) $100a^2b^2 - 0,16m^2$.

787. Обчисліть, застосовуючи формулу різниці квадратів:

1) $67^2 - 57^2$; 2) $43^2 - 53^2$; 3) $112^2 - 88^2$;
4) $21,5^2 - 21,4^2$; 5) $0,725^2 - 0,275^2$; 6) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$.

788. Обчисліть зручним способом:

1) $43^2 - 33^2$; 2) $27^2 - 37^2$; 3) $0,97^2 - 0,03^2$.

789. Знайдіть значення виразу $x^2 - y^2$, якщо

1) $x = 55$; $y = 45$; 2) $x = 2,01$; $y = 1,99$.

790. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 16 = 0$;

2) $\frac{1}{9} - x^2 = 0$;

3) $y^2 - 0,25 = 0$;

4) $4x^2 - 9 = 0$.

791. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2 - 36 = 0$;

2) $y^2 - \frac{1}{16} = 0$;

3) $0,49 - x^2 = 0$;

4) $64y^2 - 49 = 0$.

3 **792.** Розкладіть на множники:

1) $c^4 - m^6$;

2) $p^8 - a^{10}$;

3) $a^6 - 9m^4$;

4) $100a^6 - 25x^8$;

5) $0,49 - m^4p^{12}$;

6) $36x^2c^{14} - 0,16d^4$;

7) $\frac{25}{49}a^8 - \frac{36}{49}b^6c^2$;

8) $-0,01m^2 + 0,81x^6y^8$;

9) $1\frac{7}{9}t^{20}a^{24} - 1\frac{11}{25}p^{16}q^{18}$.

793. Розкладіть на множники:

1) $a^8 - 16m^6$;

2) $36c^6 - 49a^{10}$;

3) $0,25 - m^{12}a^2$;

4) $-121p^8c^4 + 4a^2$;

5) $-\frac{25}{36}a^2b^4 + \frac{36}{49}c^6$;

6) $2\frac{1}{4}a^2b^8 - 1\frac{9}{16}p^6c^{18}$.

794. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{100}{15^2 - 10^2}$;

2) $\frac{29^2 - 21^2}{80}$;

3) $\frac{47^2 - 23^2}{48^2 - 22^2}$.

795. Подайте вираз у вигляді добутку:

1) $(x + 2)^2 - 1$;

2) $4 - (y + 3)^2$;

3) $(4m - 5)^2 - 16$;

4) $6,25 - (a - 3,5)^2$;

5) $(2x - 5)^2 - 49$;

6) $1 - (2x + 1)^2$.

796. Розкладіть на множники:

1) $16x^2 - (1 + 3x)^2$;

2) $(3y - 5)^2 - 16y^2$;

3) $49m^2 - (a + 3m)^2$;

4) $(5a - 2b)^2 - 25a^2$.

797. Розкладіть на множники:

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| 1) $(p + 2)^2 - 9$; | 2) $16 - (m - 3)^2$; |
| 3) $(3x - 2)^2 - 36$; | 4) $x^2 - (2x - 1)^2$; |
| 5) $(5a - 3b)^2 - 9b^2$; | 6) $(3x + 4y)^2 - 100y^2$. |

798. Знайдіть корені рівняння:

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1) $(x - 1)^2 - 25 = 0$; | 2) $49 - (2x + 5)^2 = 0$; |
| 3) $(5x + 3)^2 = 64$; | 4) $(0,1x - 0,5)^2 = 0,36$. |

799. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1) $(x + 2)^2 - 36 = 0$; | 2) $(5x - 4)^2 - 81 = 0$; |
| 3) $(2x + 7)^2 = 49$; | 4) $(0,2x - 0,5)^2 = 0,09$. |

800. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(n + 7)^2 - n^2$ ділиться на 7.

4 **801.** Подайте вираз у вигляді добутку:

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1) $a^6 - (b - 5a^3)^2$; | 2) $(-3m^2 + 4p)^2 - 9m^4$; |
| 3) $(7x + 2y)^2 - (2x - 7y)^2$; | 4) $(a + b + c)^2 - (a + b - c)^2$; |
| 5) $a^2(a + 1)^2 - c^8$; | 6) $(5a - b - 1)^2 - (5a + b - 1)^2$. |

802. Розкладіть на множники:

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $(5a^2 - 3b)^2 - 16a^4$; | 2) $m^8 - (3c - 2m^4)^2$; |
| 3) $(2a + 3b)^2 - (4a - 5b)^2$; | 4) $(x - y + t)^2 - (x - y - t)^2$. |

803. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|------------------------------------|----------------------|
| 1) $(3x - 4)^2 - (5x - 8)^2 = 0$; | 2) $x^4 - 81 = 0$; |
| 3) $16x^4 - 1 = 0$; | 4) $81x^2 + 4 = 0$. |

804. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних цілих чисел, де зменшуваним є більше число, дорівнює сумі цих чисел.

Вправи для повторення

805. Спростіть вираз:

- $(t + 1)(t - 7) - (t - 1)(t + 7)$;
- $(a^3 - 2b)(a^2 + 2b) - (a^2 - 2b)(a^3 + 2b)$.

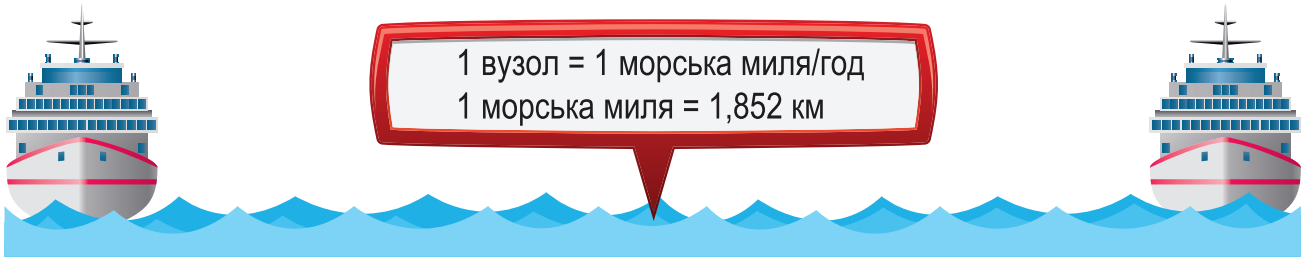
806. Обчисліть, використовуючи формулу куба двочлена:

- 1) $(100 - 1)^3$; 2) 41^3 ;
3) 29^3 ; 4) $0,99^3$.



Життєва математика

807. Корабель пливе зі швидкістю 11 вузлів. Велосипедист долає 100 м за 18 с. Порівняйте швидкості корабля і велосипедиста. Зверніть увагу на малюнок.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

808. Подайте у вигляді куба число:

- 1) 1; 2) 27;
3) 64; 4) 216.

809. Подайте у вигляді куба одночлен:

- 1) x^6 ; 2) $8y^3$;
3) $1000m^{12}$; 4) $125p^3c^9$.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

810. Господиня має важільні терези й гирку масою 100 г. Як їй за чотири зважування відміряти 1,5 кг крупи?



§ 20. Сума і різниця кубів

Формула суми кубів

Помножимо $a + b$ на $a^2 - ab + b^2$:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Маємо тотожність, яку називають **формулою суми кубів**:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

У правій частині формули множник $a^2 - ab + b^2$ нагадує повний квадрат $a^2 - 2ab + b^2$, але замість подвоєного добутку $2ab$ містить ab . Тричлен $a^2 - ab + b^2$ називають **неповним квадратом різниці** виразів a і b . Тому формулу суми кубів читають так:

сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів на неповний квадрат їх різниці.

Приклад 1. Розкласти многочлен $x^3 + 64$ на множники.

Розв'язання. Оскільки $64 = 4^3$, то цей многочлен можна подати у вигляді суми кубів двох виразів:

$$x^3 + 64 = x^3 + 4^3.$$

За формулою суми кубів маємо:

$$x^3 + 4^3 = (x + 4)(x^2 - 4x + 4^2) = (x + 4)(x^2 - 4x + 16).$$

Відповідь: $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$.

Формула різниці кубів

Тепер помножимо $a - b$ на $a^2 + ab + b^2$:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Маємо тотожність, яку називають **формулою різниці кубів**:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають **неповним квадратом суми** виразів a і b , а формулу різниці кубів читають так:

різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на неповний квадрат їх суми.

Приклад 2. Розкласти многочлен $27a^3 - m^6$ на множники.

Розв'язання. Оскільки $27a^3 = (3a)^3$ і $m^6 = (m^2)^3$, то цей многочлен можна перетворити на різницю кубів:

$$27a^3 - m^6 = (3a)^3 - (m^2)^3.$$

Далі застосуємо формулу різниці кубів:

$$(3a)^3 - (m^2)^3 = (3a - m^2)((3a)^2 + 3am^2 + (m^2)^2) = (3a - m^2) \times (9a^2 + 3am^2 + m^4).$$

Відповідь: $(3a - m^2)(9a^2 + 3am^2 + m^4)$.

Приклад 3. Подати вираз $(p - 2)^3 - 1$ у вигляді добутку.

Розв'язання. $(p - 2)^3 - 1 = (p - 2)^3 - 1^3 = (p - 2 - 1)((p - 2)^2 + (p - 2) \cdot 1 + 1^2) = (p - 3)(p^2 - 4p + 4 + p - 2 + 1) = (p - 3) \times (p^2 - 3p + 3)$.

Відповідь: $(p - 3)(p^2 - 3p + 3)$.

Множення суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці та різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми

Помінявши місцями ліві та праві частини формул суми і різниці кубів, матимемо:

$$\begin{aligned}(a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3, \\(a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3.\end{aligned}$$

Ці тотожності є формулами скороченого множення і дають змогу скорочено виконувати множення суми двох виразів на

неповний квадрат їх різниці та різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми.

**Добуток суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці дорівнює сумі кубів цих виразів.
Добуток різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми дорівнює різниці кубів цих виразів.**

Приклад 4. Перетворити вираз $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$ на многочлен.

Розв'язання. Оскільки вираз $x^2 - 2xy + 4y^2$ є неповним квадратом різниці виразів x і $2y$, то можемо застосувати формулу суми кубів:

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = x^3 + (2y)^3 = x^3 + 8y^3.$$

Відповідь: $x^3 + 8y^3$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$(5x - 1)(25x^2 + 5x + 1) = 125x^3 - 8x.$$

Розв'язання. Застосуємо до лівої частини рівняння формулу різниці кубів, одержимо:

$$(5x)^3 - 1^3 = 125x^3 - 8x;$$

$$125x^3 - 1 = 125x^3 - 8x;$$

$$125x^3 - 125x^3 + 8x = 1;$$

$$8x = 1;$$

$$x = 0,125.$$

Відповідь: 0,125.

? Запам'ятайте формулу суми кубів. **o** Запам'ятайте формулу різниці кубів. **o** Якому виразу тотожно дорівнює добуток суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці? А добуток різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 811. (Усно.) Який з виразів є неповним квадратом різниці виразів x і y , а який – неповним квадратом їх суми:

- 1) $x^2 + xy + y^2$; 2) $x^2 - 2xy + y^2$; 3) $x^2 - xy - y^2$;
4) $x^2 + 2xy + y^2$; 5) $x^2 - xy + y^2$; 6) $x^2 + 4xy + y^2$?

812. (Усно.) Які з рівностей є тотожностями:

- 1) $c^3 + d^3 = (c^2 + d^2)(c + d)$;
2) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$;
3) $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$;
4) $p^3 - t^3 = (p - t)(p^2 + 2pt + t^2)$?

813. Серед рівностей виберіть ті, що є тотожностями:

- 1) $m^3 - p^3 = (m^2 - p^2)(m - p)$;
2) $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - xa + a^2)$;
3) $c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + cd + d^2)$;
4) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$.

2 814. Розкладіть на множники:

- 1) $m^3 - p^3$; 2) $a^3 + d^3$; 3) $8 - a^3$;
4) $q^3 + 27$; 5) $n^3 - 64$; 6) $0,001 + t^3$.

815. Подайте вираз у вигляді суми або різниці кубів і розкладіть його на множники:

- 1) $8a^3 + 1$; 2) $27 - \frac{1}{27}c^3$; 3) $y^3 + 64x^3$;
4) $0,125b^3 - 64y^3$; 5) $1 + 1000m^3$; 6) $\frac{1}{125}a^3 - \frac{1}{216}b^3$.

816. Розкладіть на множники:

- 1) $\frac{1}{27} + b^3$; 2) $\frac{1}{8}x^3 - 8$;
3) $1 + 125p^3$; 4) $0,064m^3 - \frac{1}{1000}n^3$;

5) $\frac{27}{8}a^3 + \frac{8}{27}b^3$;

6) $216p^3 - \frac{1}{216}q^3$.

817. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$;

2) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$;

3) $(1 - d + d^2)(1 + d)$;

4) $(m - 2)(m^2 + 2m + 4)$.

818. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$;

2) $(m - 1)(m^2 + m + 1)$;

3) $(b + 4)(b^2 - 4b + 16)$;

4) $(25 + 5q + q^2)(5 - q)$.

819. Знайдіть значення виразу:

1) $(4p - 1)(16p^2 + 4p + 1)$, якщо $p = -0,25$;

2) $(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$, якщо $a = -\frac{1}{2}$; $b = 2$.

820. Знайдіть значення виразу:

1) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$, якщо $x = \frac{2}{3}$;

2) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$, якщо $x = -2$; $y = 0,5$.

3 **821.** Розкладіть многочлен на множники:

1) $a^3 - b^6$;

2) $t^{12} + c^9$;

3) $p^{18} + m^{24}$;

4) $-c^3 + m^{15}$;

5) $-\frac{1}{8} - a^{24}$;

6) $-c^{99} - d^{60}$;

7) $x^3y^3 + 1$;

8) $27 - a^3b^9$;

9) $x^6y^{12} + m^{27}$;

10) $64m^6p^{21} - 125x^3$;

11) $\frac{1}{27}c^{24}m^{18} + 27t^9$;

12) $343a^{18}b^{33} - 0,001c^{36}$.

822. Запишіть вираз у вигляді добутку:

1) $x^9 - y^6$;

2) $-p^{12} - 27$;

3) $-a^9b^6 + 1$;

4) $216p^{15} + 0,008t^{18}$;

5) $64m^{21}c^3 - p^{30}$;

6) $512t^{24}p^{27} - 729a^{33}$.

823. Виконайте множення:

1) $(b^3 - d^2)(b^6 + b^3d^2 + d^4)$;

2) $(c^3 + 2p)(c^6 - 2pc^3 + 4p^2)$;

- 3) $(9x^2 + 3xy + y^2)(3x - y)$;
- 4) $(4c + 3d)(16c^2 - 12cd + 9d^2)$;
- 5) $(a^8 - 4a^4 + 16)(a^4 + 4)$;
- 6) $(5m^2 - 6p^3)(25m^4 + 30m^2p^3 + 36p^6)$.

824. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $(a^5 - m^2)(a^{10} + a^5m^2 + m^4)$;
- 2) $(25a^2 - 5ab + b^2)(5a + b)$;
- 3) $(2x - 7y^2)(4x^2 + 14xy^2 + 49y^4)$;
- 4) $(3p^2 + 4c^3)(9p^4 - 12p^2c^3 + 16c^6)$.

825. Виконайте дії:

- 1) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - a(a^2 - 5)$;
- 2) $(b - 3)(b^2 + 3b + 9) - b(b - 3)(b + 3)$;
- 3) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$;
- 4) $(2b^2 - 1)(4b^4 + 2b^2 + 1) - (2b^3 + 1)^2$.

826. Спростіть вираз:

- 1) $(a - 4)(a^2 + 4a + 16) - a(a - 2)(a + 2)$;
- 2) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) - (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4)$;
- 3) $b(b - 1)^2 - (b - 5)(b^2 + 5b + 25)$;
- 4) $(a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)$.

827. Знайдіть значення виразу:

- 1) $(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1) - 7a^3$, якщо $a = -2$;
- 2) $(x^2 + 5xy + 25y^2)(x - 5y) + 25y^3 - x^3$, якщо $x = -2024$,
 $y = 0,1$.

828. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) = x^3 - 8x$;
- 2) $(x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1) = x^9 - 5x$;
- 3) $(9x^2 - 6x + 4)(3x + 2) = 3x(3x + 4)(3x - 4) + 32$;
- 4) $8\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + x + 4\right) - x(x - 3)^2 = 6x^2 - 46$.

829. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 24x + x^3$;

2) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 2x(2x - 3)(2x + 3) + 37$.

4 **830.** Розкладіть на множники:

1) $(a + 3)^3 - a^3$;

2) $(x - 4)^3 + 8$;

3) $27p^3 - (p + 1)^3$;

4) $64x^3 + (x - 1)^3$.

831. Розкладіть на множники:

1) $(a + 1)^3 + a^3$;

2) $(b - 2)^3 - 8$;

3) $125b^3 - (b - 1)^3$;

4) $64a^3 + (a + 2)^3$.

832. Доведіть, що дві останні цифри значення виразу $415^3 + 85^3$ є нулями.

833. Чи ділиться число $115^3 - 15^3$ на 100?

834. Обчисліть значення виразу $\frac{57^3 - 43^3}{14} + 57 \cdot 43$ зручним способом.

Вправи для повторення

835. Доведіть, що різниця натурального трицифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами у зворотному порядку, ділиться на 11.

836. В одній упаковці було 90 зошитів, а в другій – 30. Коли з першої взяли вдвічі більше зошитів, ніж з другої, то в першій упаковці залишилося в 5 разів більше зошитів, ніж у другій. По скільки зошитів залишилося в кожній упаковці?

Життєва математика

837. У Марини Олегівни є дисконтна картка книгарні «Олімп», за умовами якої покупцю надається знижка в розмірі 12 % від вартості покупки. Скільки



Марина Олегівна заплатить за книжку вартістю 150 грн, якщо використає дисконтну картку?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

838. Розкладіть на множники многочлен:

1) $a^3 + a^2$;

2) $3c^5 - 15c^2$;

3) $x^2 + 6x + 9$;

4) $9x^2 - 6x + 1$;

5) $0,81 - y^2$;

6) $0,25a^2 - \frac{9}{16}b^2$.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

839. З українського фольклору. Жінка на базарі курей продавала. Першому покупцю вона продала половину всіх курей та ще пів курки. Другому – половину з того, що залишилося, та ще пів курки. Третьому – половину того, що залишилося, та ще пів курки. Після цього з'ясувалося, що всіх курей продано, і задоволена жінка повернулася додому. Скільки курей вона винесла на продаж?

§ 21. Застосування кількох способів розкладання многочленів на множники

Приклади розкладання многочленів на множники із застосуванням двох послідовних способів

У попередніх параграфах ми вже розглядали кілька способів розкладання многочленів на множники: винесення спільного множника за дужки, групування, застосування формул скороченого множення.

Іноді для розкладання на множники доводиться застосувати кілька способів. Тоді розкладання доцільно починати з винесення спільного множника за дужки, якщо такий множник існує.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Розкласти на множники многочлен $5m^4 - 20m^2n^2$.
Розв'язання. Спочатку винесемо за дужки спільний множник $5m^2$:

$$5m^4 - 20m^2n^2 = 5m^2(m^2 - 4n^2).$$

Тепер до виразу в дужках застосуємо формулу різниці квадратів:

$$5m^2(m^2 - 4n^2) = 5m^2(m - 2n)(m + 2n).$$

Відповідь: $5m^2(m - 2n)(m + 2n)$.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен
 $2x^4 + 12x^3 + 18x^2$.

Розв'язання. Винесемо за дужки спільний множник $2x^2$, а вираз у дужках згорнемо в повний квадрат:

$$2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2.$$

Відповідь: $2x^2(x + 3)^2$.

Приклад 3. Розкласти на множники многочлен
 $a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b$.

Розв'язання. Винесемо за дужки спільний множник a^2b , матимемо:

$$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b = a^2b(ab - 3a + 5b - 15).$$

Многочлен $ab - 3a + 5b - 15$, що утворився в дужках, можна розкласти на множники способом групування:

$$\begin{aligned} ab - 3a + 5b - 15 &= (ab - 3a) + (5b - 15) = a\underline{(b - 3)} + 5\underline{(b - 3)} = \\ &= (b - 3)(a + 5). \end{aligned}$$

Остаточного маємо: $a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b = a^2b(b - 3) \times (a + 5)$.

Відповідь: $a^2b(b - 3)(a + 5)$.

Універсального правила для розкладання многочленів на множники немає. Приклади, які ми розглянули вище, дають

змогу лише сформулювати *правило-орієнтир*, якого бажано дотримуватися для розкладання многочленів на множники.

- 1) Якщо можливо, винести спільний множник за дужки.
- 2) Перевірити, чи не є вираз, отриманий у дужках, квадратом двочлена або різницею квадратів, різницею чи сумою кубів.
- 3) Якщо многочлен, отриманий у дужках, містить чотири або шість доданків, перевірити, чи не розкладається він на множники способом групування.

Штучні прийоми розкладання многочленів на множники

Окрім запропонованого правила, інколи допомагають штучні прийоми. Розглянемо їх на прикладах.

Приклад 4. Розкласти на множники многочлен

$$a^2 - 4a + 4 - b^2.$$

Розв'язання. Оскільки перші три доданки є квадратом двочлена, застосуємо штучне групування, розбивши многочлен на дві групи, перша з яких є квадратом двочлена, а до другої включимо четвертий доданок. Тоді цей многочлен перетвориться на різницю квадратів двох виразів:

$$a^2 - 4a + 4 - b^2 = (a - 2)^2 - b^2 = (a - 2 - b)(a - 2 + b).$$

Відповідь: $(a - 2 - b)(a - 2 + b)$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $x^2 + 8x - 20 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо таке число, яке разом з виразом $x^2 + 8x$ утворює квадрат двочлена. Це число 16. Тому в лівій частині рівняння додамо і віднімемо число 16. Одержимо:

$$x^2 + 8x + 16 - 16 - 20 = 0;$$

$$(x^2 + 8x + 16) - 36 = 0;$$

$$(x + 4)^2 - 6^2 = 0.$$

Далі розкладемо ліву частину рівняння на множники за формулою різниці квадратів і розв'яжемо одержане рівняння:

$$(x + 4 - 6)(x + 4 + 6) = 0;$$

$$(x - 2)(x + 10) = 0;$$

$$x - 2 = 0 \text{ або } x + 10 = 0;$$

$$x = 2 \text{ або } x = -10.$$

Відповідь: $-10; 2$.

Перетворення $x^2 + 8x - 20 = x^2 + 8x + 16 - 16 - 20 = (x + 4)^2 - 36$ називають *виділенням квадрата двочлена*.

Про розкладання многочленів на множники

Не кожний многочлен другого степеня, а тим паче — вищих за другий степінь, можна розкласти на множники. Наприклад, не можна розкласти на множники многочлени $x^2 + 4$, $x^2 + y^2 + 1$, $x^2 + x + 2$ тощо. Зокрема, не розкладаються на множники многочлени другого степеня, які є неповними квадратами суми або різниці та не містять спільного множника. Наприклад, $m^2 + m + 1$, $p^2 - 3p + 9$, $4x^2 + 2x + 1$ тощо.

- ?** Які способи розкладання многочленів на множники ви знаєте?
- У чому полягає правило-орієнтир для розкладання многочленів на множники?
 - Чи кожний многочлен можна розкласти на множники?
 - Наведіть приклади многочленів, які не можна розкласти на множники.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** **840.** (Усно.) З формул виберіть ті, що є тотожностями:
- 1) $(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2$;
 - 2) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;

- 3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- 4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
- 5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + 2ab + b^2)$;
- 6) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$.

841. Які з формул є тотожностями:

- 1) $(m - n)^2 = m^2 - mn + n^2$;
- 2) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$;
- 3) $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$;
- 4) $(c + d)^2 = c^2 + 2cd + d^2$;
- 5) $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$;
- 6) $a^2 - b^2 = (a + b)(a + b)$?

842. Закінчіть розкладання на множники:

- 1) $xa^2 - 9x = x(a^2 - 9) = x(a^2 - 3^2) = \dots$;
- 2) $bm^2 - 2mb + b = b(m^2 - 2m + 1) = \dots$

2 **843.** (Усно.) Розкладіть на множники:

- 1) $ax^2 - ay^2$;
- 2) $mp^2 - m$;
- 3) $b^3 - b$.

844. Розкладіть на множники:

- 1) $5a^2 - 5b^2$;
- 2) $ap^2 - aq^2$;
- 3) $2xm^2 - 2xn^2$;
- 4) $7b^2 - 7$;
- 5) $16x^2 - 4$;
- 6) $75 - 27c^2$;
- 7) $5mk^2 - 20m$;
- 8) $63ad^2 - 7a$;
- 9) $125px^2 - 5py^2$.

845. Подайте у вигляді добутку:

- 1) $m^3 - m$;
- 2) $p^2 - p^4$;
- 3) $7a - 7a^3$;
- 4) $9b^5 - 9b^3$;
- 5) $81c^3 - c^5$;
- 6) $3a^5 - 300a^7$.

846. Розкладіть на множники:

- 1) $ax^2 - ay^2$;
- 2) $ma^2 - 4mb^2$;
- 3) $28 - 7m^2$;
- 4) $p^5 - p^3$;
- 5) $b - 4b^3$;
- 6) $a^5 - a^3c^2$;
- 7) $15d - 15d^3$;
- 8) $625b^3 - b^5$;
- 9) $500a^5 - 45a^3$.

847. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3x^2 - 27 = 0$;
- 2) $5 - 20x^2 = 0$.

848. Знайдіть корені рівняння:

1) $8 - 2x^2 = 0$;

2) $75x^2 - 3 = 0$.

849. Розкладіть на множники:

1) $3a^2 + 6ab + 3b^2$;

2) $-2m^2 + 4mn - 2n^2$;

3) $-a^2 - 4a - 4$;

4) $6a^2 + 24ab + 24b^2$;

5) $2am^2 + 4am + 2a$;

6) $8a^4 - 8a^3 + 2a^2$.

850. Подайте многочлен у вигляді добутку:

1) $-4a^2 + 8ab - 4b^2$;

2) $-25by^2 - 10by - b$;

3) $a^5 + 6a^4m + 9a^3m^2$;

4) $6by^2 + 36by^3 + 54by^4$.

851. Знайдіть значення виразу:

1) $3m^2 - 3n^2$, якщо $m = 41$, $n = 59$;

2) $2x^2 + 4xy + 2y^2$, якщо $x = 29$, $y = -28$.

852. Знайдіть значення виразу:

1) $5x^2 - 5y^2$, якщо $x = 49$, $y = 51$;

2) $3a^2 - 6ab + 3b^2$, якщо $a = 102$, $b = 101$.

3 **853.** Подайте у вигляді добутку:

1) $3a^3 - 3b^3$;

2) $7x^3 + 7y^3$;

3) $-pm^3 - pn^3$;

4) $16a^3 - 2$;

5) $125m + m^4$;

6) $a^7 - a^4$.

854. Розкладіть на множники:

1) $bx^3 - by^3$;

2) $-2a^3 - 2b^3$;

3) $8a - a^4$.

855. Розкладіть на множники:

1) $a^4 - 81$;

2) $16 - c^4$;

3) $x^8 - 1$;

4) $a^4 - b^8$.

856. Доведіть тотожність:

$$a^8 - b^8 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4).$$

857. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - x = 0$;

2) $112y - 7y^3 = 0$;

3) $64x^3 + x = 0$;

4) $y^3 + 4y^2 + 4y = 0$.

858. Розв'яжіть рівняння:

1) $y - y^3 = 0$;

2) $5x^3 - 180x = 0$;

3) $16y^3 + y = 0$;

4) $x^3 - 2x^2 + x = 0$.

859. Розкладіть на множники:

1) $7ab + 21a - 7b - 21$;

2) $6mn + 60 - 30m - 12n$;

3) $-abc - 3ac - 4ab - 12a$;

4) $a^3 - ab - a^2b + a^2$.

860. Подайте вираз у вигляді добутку:

1) $90 + 3ab - 45a - 6b$;

2) $-3mn - 9m - 18n - 54$;

3) $a^4x + a^4 + a^3x + a^3$;

4) $p^3a^2 + pa^2 - 3ap^3 - 3ap$.

861. Розкладіть на множники:

1) $a^2 + 2ab + b^2 - 16$;

2) $a^2 - x^2 - 2xy - y^2$;

3) $p^2 - x^2 + 10p + 25$;

4) $p^2 - x^2 + 20x - 100$.

862. Розкладіть на множники:

1) $x^2 + 2xy + y^2 - 25$;

2) $m^2 - a^2 + 2ab - b^2$;

3) $m^2 - a^2 - 8m + 16$;

4) $m^2 - b^2 - 8b - 16$.

863. Подайте вираз у вигляді добутку:

1) $a^2 - 81 + a - 9$;

2) $m^2 - a^2 - (a + m)$;

3) $x^2 - y^2 - x + y$;

4) $x + x^2 - y - y^2$;

5) $a - 3b + a^2 - 9b^2$;

6) $16m^2 - 25n^2 - 4m - 5n$.

864. Розкладіть на множники:

1) $a^2 - b^2 - (a - b)$;

2) $p^2 - b - p - b^2$;

3) $16x^2 - 25y^2 + 4x - 5y$;

4) $100m^2 - 10m + 9n - 81n^2$.

865. Перетворіть вираз на добуток:

1) $p^2(m - 3) - 2p(m - 3) + (m - 3)$;

2) $1 - a^2 - 4b(1 - a^2) + 4b^2(1 - a^2)$.

866. Доведіть тотожність:

$$c^2(c - 2) - 10c(c - 2) + 25(c - 2) = (c - 2)(c - 5)^2.$$

867. Подайте у вигляді добутку:

1) $ab^2 - b^3 - a + b$;

2) $ax^2 - a^3 + 7x^2 - 7a^2$;

3) $p^3 + p^2q - 4p - 4q$;

4) $a^3 - 5m^2 + 5a^2 - am^2$.

868. Розкладіть на множники:

1) $m^3 + n^3 + m + n$;

2) $a - b - (a^3 - b^3)$;

3) $a^3 + 8 - a^2 - 2a$;

4) $8p^3 - 1 - 12p^2 + 6p$.

869. Подайте у вигляді добутку:

1) $m^3 + m^2n - m - n$;

2) $ba^2 - 3a^2 - 4b + 12$;

3) $a^3 - b^3 + a - b$;

4) $x^3 + 1 - 5x - 5$.

4 **870.** Розв'яжіть рівняння:

1) $y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0$;

2) $x^3 = 2x^2 + 4x - 8$.

871. Для якого значення x :

1) значення виразу $x^3 - x^2 - x + 1$ дорівнює нулю;

2) значення виразів $x^3 - 9x$ і $x^2 - 9$ між собою рівні?

872. Запишіть у вигляді добутку:

1) $9(a + b)^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$;

2) $25(3y - 2m)^2 - 36(9y^2 + 12my + 4m^2)$.

873. Розкладіть на множники:

1) $a^3 + 8b^3 + a^2 - 2ab + 4b^2$;

2) $m^3 - 8n^3 + m^2 - 4mn + 4n^2$.

874. Перетворіть многочлен на добуток многочленів:

1) $a^3 - b^3 + a^2 - 2ab + b^2$;

2) $c^2 + 2cd + d^2 - x^2 - 2xy - y^2$.

875. Розкладіть тричлен на множники, виділивши попередньо квадрат двочлена:

1) $x^2 - 2x - 3$;

2) $x^2 + 8x - 9$;

3) $x^2 - 3x - 4$;

4) $x^2 + x - 2$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 4) \quad x^2 + x - 2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(x + 2). \end{aligned}$$

*** 876.** Доведіть, що для будь-якого цілого значення n значення виразу $\frac{n^3 - n}{6}$ є числом цілим.

Вправи для повторення

877. Спростіть вираз:

1) $x(x + 1)(x + 2) - 3(x - 2)(x + 2) + 2(x - 6)$;

2) $(2x + 3y)(3y - x) - (2x - y)(5x - y) + (2x - 3y)(5x + 2y)$.

878. Розв'яжіть рівняння:

$$x((x - 2)^2 + 4x) = 64 \left(\frac{1}{4}x - 1 \right) \left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x + 1 \right).$$

879. Супермаркет електроніки до річниці свого відкриття вирішив продати 141 планшет і 95 смартфонів зі знижками. Щогодини продавали по 12 акційних планшетів та по 10 акційних смартфонів. Через скільки годин від початку дії знижок акційних планшетів у супермаркеті залишалось утричі більше, ніж акційних смартфонів?



Життєва математика

880. Світлана вклала 60 000 грн у цінні папери, придбавши акцій фірми «Альфа» на 15 000 грн, акцій компанії «Бета» – на 20 000 грн, а решту вклавши в акції фірми «Гамма». Через рік акції фірми «Альфа» подорожчали на 20 %, акції компанії «Бета» – на 8 %, а акції фірми «Гамма» подешевшали на 10 %. Яким є загальний прибуток чи збиток Світлани за рік?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

881. Тарас і Яна живуть в одному під'їзді на одному поверсі й навчаються в одній школі. Тарас пішки витрачає на дорогу до школи 12 хв, а Яна – 18 хв. Через 3 хвилини після того, як вийшла Яна, до школи вирушив і Тарас. Через який час після свого виходу він наздожене Яну?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. Якому многочлену тотожно дорівнює вираз $(m - n)^2$?
- А. $m^2 + 2mn + n^2$ Б. $m^2 - n^2$
В. $m^2 + n^2$ Г. $m^2 - 2mn + n^2$
2. Знайдіть добуток $(a - x)(a + x)$.
- А. $a^2 + x^2$ Б. $a^2 - x^2$
В. $x^2 - a^2$ Г. $a^2 + 2xa + x^2$
3. Подайте вираз $x^2 + 2xy + y^2$ у вигляді квадрата двочлена.
- А. $(x - y)^2$ Б. $(y - x)^2$ В. $(2x + y)^2$ Г. $(x + y)^2$
- 2** 4. Перетворіть вираз $(5x - 1)^2$ на многочлен.
- А. $5x^2 - 10x + 1$ Б. $25x^2 + 10x + 1$
В. $25x^2 - 10x + 1$ Г. $25x^2 - 1$
5. Розкладіть двочлен $-16 + 9a^2$ на множники.
- А. $(3a - 4)(3a - 4)$ Б. $(3a + 4)(4 - 3a)$
В. $(3a + 4)(3a - 4)$ Г. $(3a - 4)^2$
6. Подайте вираз $m^3 + 64$ у вигляді добутку.
- А. $(m + 4)(m^2 - 4m + 16)$ Б. $(m + 4)(m^2 - 8m + 16)$
В. $(m - 4)(m^2 + 4m + 16)$ Г. $(m + 4)(m^2 - 4m - 16)$
- 3** 7. Розв'яжіть рівняння: $x(x + 2) - (x - 3)^2 = 7$.
- А. -2 Б. -1 В. 1 Г. 2
8. Спростіть вираз $(m^2 + 2p)(m^4 - 2m^2p + 4p^2)$.
- А. $m^4 + 8p^3$ Б. $m^6 + 8p^3$
В. $m^6 - 8p^3$ Г. $m^6 + 4p^3$
9. Розкладіть многочлен $3ab - 3b + 6a - 6$ на множники.
- А. $(a - 1)(b + 2)$ Б. $3(a + 1)(b - 2)$
В. $3(a + 1)(b + 2)$ Г. $3(a - 1)(b + 2)$

- 4** 10. Якого найменшого значення набуває вираз $x^2 + 4x + 3$?
- А. 1 Б. 0 В. -1 Г. -2
11. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.
- А. -2; -1; 1 Б. -2; 1 В. -2; -1 Г. -1; 1
12. Розкладіть вираз $(b - 2)^3 - b^3$ на множники.
- А. $2(b^2 - 6b + 4)$ Б. $-2(b^2 - 6b + 4)$
В. $-2(3b^2 - 6b + 4)$ Г. $2(3b^2 - 6b + 4)$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

- 3** 13. Установіть відповідність між виразом (1-3) та його значенням, якщо $x = 1,4$ (А-Г).

Вираз	Значення виразу
1. $25x^2 - 70x + 49$	А. -1
2. $(5x - 1)(25x^2 + 5x + 1) - 125x^3$	Б. 0
3. $72 - 120x + 50x^2$	В. 1
	Г. 2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО §§ 16-21

- 1** 1. Перетворіть вираз на многочлен:
- $(p + a)^2$;
 - $(c - m)(c + m)$.
2. Розкладіть на множники:
- $t^2 - 2tb + b^2$;
 - $d^2 - n^2$.
3. Які з рівностей є тотожностями:
- $(p - a)^2 = p^2 - pa + a^2$;
 - $p^3 + q^3 = (p + q)(p^2 - pq + q^2)$;
 - $m^2 - c^2 = (m - c)(m + c)$;
 - $d^3 - t^3 = (d - t)(d^2 + 2dt + t^2)$?

- 2** 4. Перетворіть вираз на многочлен:
 1) $(3a - 5)^2$; 2) $(7 + 2b)(2b - 7)$.
5. Розкладіть многочлен на множники:
 1) $a^2 + 6a + 9$; 2) $-25 + 36x^2$;
 3) $b^3 + 64$; 4) $7c^2 - 7d^2$.
6. Спростіть вираз $(2x + 3)^2 + (7 - 2x)(7 + 2x)$ та знайдіть його значення, якщо $x = -\frac{1}{12}$.
- 3** 7. Розв'яжіть рівняння:
 1) $2x^3 - 50x = 0$;
 2) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$.
8. Спростіть вираз:
 1) $(-4a + 3b)^2 + (-4a + 5b)(5b + 4a) + 24ab$;
 2) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - a(a - 3)(a + 3)$.
- 4** 9. Доведіть, що для будь-якого значення змінної x вираз $x^2 + 8x + 17$ набуває лише додатних значень. Якого найменшого значення набуває цей вираз і для якого значення x ?

Додаткові вправи

- 4** 10. Перетворіть вираз на многочлен:
 1) $(a + 3)^3$; 2) $(2m - 5)^3$.
11. Знайдіть дві останні цифри числа $293^3 - 93^3$.
12. Розкладіть тричлен $x^2 + 6x - 7$ на множники.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 4

- 1** 882. Випишіть вирази, які є виразами зі змінними, у дві групи: у першу – цілі раціональні вирази, у другу – дробові раціональні вирази:

$$1) m - 7; \quad 2) \frac{a^2 - b}{5}; \quad 3) \frac{7 + 9 \cdot 2}{3}; \quad 4) (3 - 9) + 7 \cdot 8;$$

$$5) -\frac{1}{6} ab; \quad 6) \frac{3}{a + c^3}; \quad 7) \frac{1}{x} + \frac{1}{3}; \quad 8) a^3 - a^2 + a.$$

2 883. На склад привезли a мішків цукру, по 50 кг у кожному. Запишіть виразом масу всього завезеного цукру. Знайдіть значення цього виразу, якщо $a = 12$.

3 884. Запишіть у вигляді виразу:

- 1) двоцифрове число, у якому x десятків і y одиниць;
- 2) двоцифрове число, у якому 5 десятків і a одиниць;
- 3) трицифрове число, у якому a сотень, b десятків і c одиниць;
- 4) трицифрове число, у якому m сотень, n десятків і 6 одиниць.

4 885. Відомо, що $x - y = 2$ і $p = 3$. Знайдіть значення виразу:

$$1) x + p - y; \quad 2) x - y + 5p; \quad 3) (y - x)p;$$

$$4) \frac{3(y - x)}{-p + 4(x - y)}; \quad 5) 7x - 7y - p; \quad 6) \frac{6}{p} - \frac{4}{5(y - x)}.$$

До § 5

1 886. Спростіть вираз:

$$1) 2 + 3a - 5; \quad 2) 0,4m + m;$$

$$3) 3p - 2p + 5; \quad 4) -(m - 3).$$

2 887. Розкрийте дужки та зведіть подібні доданки:

$$1) 7(5x + 8) - 12x; \quad 2) 9m + 3(15 - 4m);$$

$$3) 6(x + 1) - 6x - 9; \quad 4) 12x - 2(3x - 5);$$

$$5) -(2x + 1) - 3(2x - 5); \quad 6) 5(x - 2) - 4(2x - 3).$$

3 888. Доведіть тотожність:

$$1) 18(a - 2) = 12a - (20 - (6a - 16));$$

$$2) 2(x - y + t) - 3(x + y - t) - 5(t - y) = -x.$$

4 889. Доведіть, що сума будь-яких трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.

***** 890. Чи є тотожністю рівність:

- 1) $|a + 5| = a + 5$; 2) $|m^2 + 1| = m^2 + 1$;
3) $|m - n| = |n - m|$; 4) $|a| + |b| = |a + b|$?

До § 6

1 891. а) Подайте добуток у вигляді степеня:

- 1) $0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3$; 2) $-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;
3) aa ; 4) $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y}$.

б) Подайте степінь у вигляді добутку однакових множників:

- 1) m^3 ; 2) 17^4 ; 3) $(p + 2)^2$; 4) $\left(\frac{a}{9}\right)^5$.

2 892. Обчисліть:

- 1) 2^6 ; 2) $(0,2)^3$; 3) $\left(-\frac{1}{8}\right)^2$; 4) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^3$;
5) $-(-2)^3$; 6) $-\left(\frac{1}{4}\right)^2$; 7) $-(-0,1)^2$; 8) $-(-1)^{27}$.

3 893. Не виконуючи обчислень, порівняйте з нулем значення виразу:

- 1) $(-1,7)^{15} \cdot (-2,7)^2$; 2) $(-2,3)^3 : (-5,89)$;
3) $-3,7^2 \cdot (-2,8)^4$; 4) $-(-2,6)^8 \cdot (-5,7)^5$.

4 894. Знайдіть останню цифру числа:

- 1) 2025^{13} ; 2) 5011^7 ; 3) 1006^{17} ; 4) $15^9 + 16^8 + 101^{17}$.

***** 895. Чи є число:

- 1) $10^{17} + 5$ кратним числу 3;
2) $10^{29} + 7$ кратним числу 9?

До § 7

1 896. Подайте у вигляді степеня:

- | | |
|----------------------|------------------------|
| 1) $b^7 b^3$; | 2) $a^3 a$; |
| 3) $9^8 \cdot 9^7$; | 4) $p^{10} : p^3$; |
| 5) $19^8 : 19^6$; | 6) $7^{15} : 7^{14}$; |
| 7) $(a^3)^4$; | 8) $(2^5)^3$. |

2 897. Обчисліть:

- | | |
|--|--|
| 1) $3^8 : 3^7$; | 2) $2^5 \cdot 2^{12} : 2^{15}$; |
| 3) $\frac{10^4 \cdot 10^9}{10^{10}}$; | 4) $\frac{8^5 \cdot 8^{10}}{8^{11} \cdot 8^3}$. |

3 898. Знайдіть значення x , для якого рівність є тотожністю:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--|
| 1) $(4^7)^x = 4^{21}$; | 2) $(3^2)^6 = 3^{3x}$; | 3) $\left(\left(\left(\left(\frac{1}{7} \right)^x \right)^3 \right)^4 \right) = \left(\frac{1}{7} \right)^{24}$. |
|-------------------------|-------------------------|--|

4 899. Запишіть вираз у вигляді степеня (n – натуральне число):

- | |
|--|
| 1) $(a^{18} : a^{2n}) \cdot (a^7 : a^n)$, де $n < 7$; |
| 2) $\frac{a^8 \cdot a^{2n}}{a^n \cdot a^5} \cdot a^{4n}$. |

***** 900. Знайдіть останню цифру числа (n – натуральне число):

- | | |
|---------------|-----------------|
| 1) 8^{4n} ; | 2) 7^{4n+1} . |
|---------------|-----------------|

До § 8

1 901. Які з виразів є одночленами? Які з одночленів подано у стандартному вигляді:

- | | | | |
|---|----------------------------|-------------|----------------|
| 1) $-a^2 c$; | 2) $7a \cdot 2b \cdot 4$; | 3) 17 ; | 4) $aaba$; |
| 5) $6 \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{3} y \right)$; | 6) $p + 1$; | 7) $-p^2$; | 8) $c^9 - c$? |

2 902. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $-\frac{1}{2}a^2b \cdot 2ab^7$;

2) $3m \cdot (-2m^2) \cdot 5m^7$;

3) $-7ap^2 \cdot 0,1a^2p^9$;

4) $1\frac{1}{8}m^2 \cdot \frac{8}{9}mc^2$;

5) $-a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-5d)$;

6) $p^9 \cdot (-2a^2) \cdot (-5p^7) \cdot a^8$.

3 903. Складіть два різних одночлени стандартного вигляду зі змінними a і b так, щоб:

1) степінь кожного з них дорівнював 7, а коефіцієнт дорівнював -8 ;

2) степінь кожного з них дорівнював 3, а коефіцієнт дорівнював 17.

До § 9

1 904. Знайдіть добуток одночленів:

1) $3m \cdot 2n$; 2) $-4p \cdot 2a$; 3) $8m^2 \cdot 3n$; 4) $-2a^3 \cdot (-b^7)$.

2 905. Подайте вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $-2,5m^2 \cdot (-4m^3p)$;

2) $12p^2m \cdot \left(-\frac{5}{6}p^3m^7\right)$;

3) $0,6m^7a^9 \cdot 10m^2a^7 \cdot \frac{1}{2}m^3$;

4) $(-mn^7)^3$;

5) $(-2a^5b^7)^2$;

6) $(m^3p^7a^9)^5$.

3 906. Знайдіть одночлен A , якщо:

1) $A \cdot 14m^2n = 42m^4n^2$;

2) $3p^2q^7 \cdot A = -21p^3q^7$.

907. Виконайте множення одночленів $0,4m \cdot 10nm^2$ та знайдіть значення одержаного добутку, якщо $m = -2$; $n = 0,5$.

4 908. Чи можна подати вираз у вигляді квадрата одночлена:

1) $49m^8n^{12}$;

2) $-25a^4b^8$;

3) $-0,2m^4n^2 \cdot (-5m^2n^4)$;

4) $-(-3a^4)^3 \cdot 3a^{12}$?

909. Для якого натурального значення n рівність

$$(2,5a^8c)^n \cdot 0,16c^5 = 2,5a^{24}c^8$$

є тотожністю?

До § 10

1 **910.** З даних одночленів складіть многочлен та вкажіть його степінь:

1) $5a^2$ і $4b$;

2) $-a^2$; ab і m ;

3) $5c^3$ і -8 ;

4) $3mn^2$; $4mn$; $-5m^2n$ і -7 .

2 **911.** Зведіть подібні члени многочлена:

1) $8a^2b - 7ab^2 + 5a^2b + 4b^2a$;

2) $5mn - 2mn - 8 - 3mn$;

3) $7m^3 + m^2 - 8 - m^3 + 3m^2$;

4) $2x^2y - 7xy^2 - 5xy + 3yx^2 + 7y^2x$.

3 **912.** Зведіть до стандартного вигляду многочлен

$$-\frac{1}{4}ab \cdot (-8ab^2) + 8a^2 \cdot (-1,5ab) + 20ab \cdot (-0,1ab^2) + a^2ab + 2a \cdot 6a^2b$$

і знайдіть його значення, якщо $a = 5$; $b = -\frac{1}{25}$.

4 **913.** Чи існують такі натуральні значення змінної a , для яких значення многочлена $2a^2 + 6a + 7$ є парним числом?

До § 11

2 **914.** Спростіть вираз:

1) $(3m + 5n) + (9m - 7n) - (-2n + 5m)$;

2) $(12ab - b^2) - (5ab + b^2) + (ab + 2b^2)$;

3) $(3x^2 + 2x) + (2x^2 - 3x - 4) - (17 - x^2)$;

4) $(m - n + p) + (m - p) - (m - n - p)$.

3 915. 1) Подайте многочлен $4x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ у вигляді суми двочленів.

2) Подайте многочлен $x^3 - 5x + 7x^2 - 9$ у вигляді різниці одночлена і тричлена.

916. Який многочлен у сумі з многочленом $2x^2 - 3x + 7$ дає:

1) 0; 2) 5; 3) $-3x + 1$; 4) $x^2 - 5x + 7$?

4 917. Доведіть, що сума двох послідовних непарних цілих чисел ділиться на 4.

918. Спростіть вираз

$$5xy - 8x^2y - \left(3xy - \left(4\frac{1}{4}xy^2 + 8x^2y \right) - 2,75xy^2 \right)$$

і знайдіть його значення, якщо $x = -1$; $y = 3$.

До § 12

1 919. Виконайте множення:

1) $a(b + 7)$; 2) $c(2 - x)$;
3) $-a(m - 3)$; 4) $-b(a - x + y)$.

2 920. Перетворіть добуток на многочлен:

1) $2xa(a^2 - 3ax)$;
2) $-3mp(2m^3 - 5mp)$;
3) $4ab^2(a^2 - 2ab - b^2)$;
4) $(4m^3 - 2mn^2 - n^2)mn^2$;
5) $(-0,1x^3y + 0,2x^2y - y^3)(-5x^2y)$;
6) $-10n^3x(5nx^2 - 2n^2x + x^5)$.

3 921. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $2x(x + y) - y(2x - y) - y(y + 1)$, якщо $x = -5$, $y = -10$;
2) $m^2(m^2 - 5m + 1) - 2m(m^3 - 4m^2 + m) + m^4 - 3m^3 + 2$,
якщо $m = -3$.

922. Для якого значення змінної значення виразу $2x(6x - 5)$ на 5 менше від відповідного значення виразу $3(4x^2 - 5)$?

4 923. Спростіть вираз

$$\frac{1}{8}x^n - \frac{5}{8}x^2(1 + x^{n-2}) + \frac{1}{2}x^3(x^{n-3} + 2),$$

де $n > 3$, n – натуральне число.

924. За перший день з овочесховища продали на 3 ц більше овочів, ніж за другий, а за третій – $\frac{4}{9}$ від того, що продали за перші два дні разом. По скільки центнерів овочів продавали кожного із цих днів, якщо разом за ці дні продали 65 ц овочів?

***** 925. Розв'яжіть рівняння $\frac{1 - \frac{3x}{2}}{4} + \frac{2 - \frac{x}{4}}{3} = x - 2$.

До § 13

1 926. Винесіть за дужки спільний множник:

- 1) $5x - 5y$; 2) $7m + 7n$;
3) $ap + ac$; 4) $bm - bk$.

2 927. Розкладіть на множники:

- 1) $7ax - 7bx$; 2) $8a + 24ac$;
3) $18p - 24p^2$; 4) $5m^3 - 10m^2$;
5) $-15a^2 - 20a^3$; 6) $a^7 - a^2 + a^5$.

3 928. Подайте вираз у вигляді добутку:

- 1) $6xy - 12x^2y + 15xy^2$;
2) $7mn^5 + 28m^2n^3 - 7m^3n^2$;
3) $a(x - 2) + 3b(x - 2) - 2(2 - x)$;
4) $8(m - 1)^2 - n(1 - m)$.

4 929. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x|x - 3| - 5|x - 3| = 0$;
2) $|x||x - 2| - 7|x - 2| = 0$.

*** 930.** Для деякого значення x значення виразу $x^2 - 3x - 13$ дорівнює -1 . Знайдіть для того самого значення x значення виразу:

1) $2x^2 - 6x - 26$;

2) $x^2(x^2 - 3x - 13) - 3x(x^2 - 3x - 13)$;

3) $3x^2 - 9x - 8$;

4) $\frac{5}{12}x^2 - \frac{5}{4}x + 3$.

До § 14

1 931. Виконайте множення:

1) $(m - p)(a + x)$;

2) $(2 + t)(a - 3)$;

3) $(a + b)(2 + c)$;

4) $(a - 2)(b - 3)$.

2 932. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(2m - 3p)(3m + 2p)$;

2) $(2a^2 + b)(3b - 5a^2)$;

3) $(7x^2 - 2x)(3x + 1)$;

4) $(5a^3 - 4a^2)(9a^2 + 8a)$;

5) $(3a^2 + 5ba)(3b - 4a)$;

6) $(mn - n^2)(4n^3 + 2n^2m)$.

3 933. Спростіть вираз:

1) $(a - 8)(2a - 2) - (a + 9)(a - 3)$;

2) $(x - y)(x + 3) - (x + y)(x - 3)$;

3) $(3a - 5b)(5a + 3b) - (5a - 3b)(3a + 5b)$;

4) $(a^3 + 4m)(a^2 - 4m) - (a^2 + 4m)(a^3 - 4m)$.

934. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)(2x + 6) - (2x - 2)(3x + 1) = -24$;

2) $(3x + 9)(x - 5) - (x - 7)(3x - 1) = 12 + 8x$.

4 935. Доведіть, що значення виразу

$2(10x - 5)(x + 0,6) + (4x^2 - 1)(2x - 5) - (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
не залежить від значення змінної.

936. Доведіть, що $(x + 1)(y + 1) - (x - 1)(y - 1) = 8$, якщо $x + y = 4$.

*** 937.** Два акваріуми мають форму прямокутного паралелепіпеда. Довжина першого – на 10 см більша за його ширину. Довжина другого акваріума на 20 см більша за

довжину першого, а ширина – на 10 см більша за ширину першого. Якщо обидва акваріуми заповнити водою на висоту 25 см, то води в другому буде на 37,5 л більше, ніж у першому. Знайдіть довжину і ширину першого акваріума.

До § 15

- 1** 938. Закінчіть розкладання многочлена на множники:
 $ab - 7b + 3a - 21 = (ab - 7b) + (3a - 21) = \dots$
- 2** 939. Розкладіть на множники:
 1) $m(a - b) + 3a - 3b$; 2) $a(b + c) + b + c$;
 3) $3a - 3c + xa - xc$; 4) $ab - ac - 4b + 4c$.
- 3** 940. Подайте многочлен у вигляді добутку:
 1) $12x^2c - 8x^2y - 9cy^3 + 6y^4$;
 2) $1,6mn^2 - 2,4mp^2 - n^3 + 1,5np^2$.
- 4** 941. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$, застосувавши розкладання многочлена на множники.

До § 16

- 1** 942. Піднесіть двочлен до степеня:
 1) $(x - p)^2$; 2) $(m + a)^2$; 3) $(b - k)^2$; 4) $(y + c)^2$.
- 2** 943. Перетворіть вираз на многочлен:
 1) $(3a - 7)^2$; 2) $(2b + 5)^2$; 3) $(10m - 5k)^2$;
 4) $(4p + 9q)^2$; 5) $(0,1m - 5p)^2$; 6) $\left(\frac{1}{6}a + 6b\right)^2$.
- 3** 944. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
 1) $(a - 1)^2 - (a - 2)^2$, якщо $a = 1,5$;
 2) $(3b + 2)^2 + (3b - 2)^2$, якщо $b = -\frac{1}{3}$.
945. Знайдіть число, квадрат якого після збільшення цього числа на 3 збільшується на 159.

4 946. Чи є рівність $(a - b)^2 = |a - b|^2$ тотожністю?

947. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $((x + y) + a)^2$; 2) $((b - c) - d)^2$;
3) $(m + n + 2)^2$; 4) $(a + 3 - c)(a + 3 - c)$.

До § 17

1 948. Подайте у вигляді квадрата двочлена:

- 1) $m^2 - 2mp + p^2$;
2) $b^2 + 2by + y^2$;
3) $a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 4^2$.

2 949. Розкладіть на множники:

- 1) $m^2 + 20m + 100$; 2) $49 - 14b + b^2$;
3) $0,09x^2 + 0,6x + 1$; 4) $\frac{1}{36} - \frac{1}{3}p + p^2$;
5) $4x^2 + 20x + 25$; 6) $4m^2 - 12mp + 9p^2$.

3 950. Знайдіть значення виразу:

- 1) $-100m^2 + 20m - 1$, якщо $m = 0,1$; $-0,9$;
2) $-4x^2 - 12xy - 9y^2$, якщо $x = 0,03$, $y = -0,02$.

4 951. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$; 2) $5y^2 + 2y + \frac{1}{5} = 0$.

952. Змініть один з коефіцієнтів многочлена так, щоб одержаний тричлен можна було подати у вигляді квадрата двочлена (знайдіть три різних розв'язки):

- 1) $100m^2 + 40mn + n^2$; 2) $25a^2 - ab + 9b^2$.

***** 953. Доведіть, що для будь-яких значень змінних вираз набуває лише невід'ємних значень:

- 1) $4x(4x - 10) + 25$;
2) $(a - 2)((a - 2) + 2m) + m^2$;
3) $(a + b)(a + b + 8) + 16$.

До § 18

1 954. Які з рівностей є тотожностями:

- 1) $(b - x)(b + x) = b^2 + x^2$; 2) $(c - d)(c + d) = c^2 - d^2$;
3) $(m + n)(m - n) = (m + n)^2$; 4) $(p + q)(p - q) = p^2 - q^2$?

2 955. Виконайте множення:

- 1) $(c + 7)(7 - c)$; 2) $(0,5m - 3)(0,5m + 3)$;
3) $(3k + 7)(3k - 7)$; 4) $(2p - 9q)(9q + 2p)$;
5) $(10m + 9n)(9n - 10m)$; 6) $\left(\frac{2}{3}c - \frac{4}{5}d\right)\left(\frac{2}{3}c + \frac{4}{5}d\right)$.

956. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $4(a - 1)(a + 1)$;
2) $b(b - 2)(b + 2)$;
3) $7p(p + 3)(p - 3)$;
4) $-3x(x + 4)(x - 4)$.

3 957. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 1) $(1,9x - 3)(3 + 1,9x) + 0,39x^2$, якщо $x = 2$;
2) $9,99 - (5y - 0,1)(5y + 0,1)$, якщо $y = \frac{1}{5}$;
3) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$, якщо $x = 1,8$;
 $y = -1,8$;
4) $(ab + 1)(ab - 1)(a^2b^2 + 1)$, якщо $a = 5$; $b = \frac{1}{5}$.

4 958. Обчисліть: $7^{40} \cdot 3^{40} - (21^{20} - 1)(21^{20} + 1)$.

До § 19

1 959. Які з рівностей є тотожностями:

- 1) $m^2 - p^2 = (m + p)(m - p)$;
2) $a^2 - 7^2 = (a - 7)(a + 7)$;
3) $c^2 - d^2 = (c - d)(c + d)$;
4) $9^2 - a^2 = (9 - a)^2$?

- 2** 960. Розкладіть на множники двочлен:
1) $x^2 - 49$; 2) $100 - p^2$; 3) $0,04m^2 - n^2$;
4) $25x^2 - 36y^2$; 5) $16a^2 - b^2c^2$; 6) $121m^2a^2 - \frac{1}{9}b^2$.

- 3** 961. Розв'яжіть рівняння, де x – змінна:
1) $a^2x^2 - b^2 = 0, a \neq 0$;
2) $x^2 - 0,09a^2 = 0$.

- 4** 962. Чи ділиться:
1) $138^2 - 136^2$ на 4; 2) $349^2 - 347^2$ на 6?

963. Розкладіть на множники вираз:
1) $9 - (2x - 8)(3x + 2) - 2x(5x + 10)$;
2) $(3x + 5)(4x - 5) - 2x(2,5 + 1,5x)$.

До § 20

- 1** 964. Який з даних виразів є неповним квадратом суми виразів m і n , а який – неповним квадратом їх різниці:
1) $m^2 - 2mn + n^2$; 2) $m^2 + mn + n^2$;
3) $m^2 + 2mn + n^2$; 4) $m^2 - mn + n^2$?

- 2** 965. Розкладіть на множники:
1) $x^3 - y^3$; 2) $p^3 + k^3$; 3) $a^3 - 64$;
4) $\frac{1}{125} + b^3$; 5) $0,001m^3 - 1$; 6) $8x^3 + 27p^3$.

- 3** 966. Доведіть, що значення виразу $37^3 + 13^3$ ділиться на 50.

- 4** 967. Доведіть тотожність
$$x^6 - y^6 = (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$$

До § 21

- 1** 968. Закінчіть розкладання на множники:
1) $ym^2 - 4y = y(m^2 - 4) = y(m^2 - 2^2) = \dots$
2) $ca^2 + 2ac + c = c(a^2 + 2a + 1) = \dots$

2 969. Розкладіть на множники многочлен:

1) $mp^2 - mq^2$;

2) $20a^2 - 5$;

3) $c - c^3$;

4) $64a^2 - a^4$;

5) $5x^2 - 10xy + 5y^2$;

6) $2b + 4bn + 2bn^2$.

3 970. Подайте у вигляді добутку:

1) $9a^3 - 9b^3$;

2) $2mn - 2bn + 6m - 6b$;

3) $\frac{1}{81} p^4 - 1$;

4) $m^2 - 4mn + 4n^2 - 25$;

5) $b^2 - 36 + b - 6$;

6) $m^3 - 4m - m^2n + 4n$.

4 971. Розкладіть на множники многочлен:

1) $am^4 - m^4 - am^2 + m^2$;

2) $a^3b - a^3 - ab + a$;

3) $b^3 + 1 - b^2 - b$;

4) $x^3 - 27 + x^4 - 9x^2$.

972. Доведіть тотожність:

1) $(a + 1)^3 - 4(a + 1) = (a + 1)(a - 1)(a + 3)$;

2) $(m^2 + 9)^2 - 36m^2 = (m - 3)^2(m + 3)^2$.



Головне в розділі 2

ТОТОЖНІ ВИРАЗИ

Два вирази, відповідні значення яких рівні між собою для будь-яких значень змінних, називають **тотожними**, або **тотожно рівними**.

ТОТОЖНІСТЬ

Рівність, яка є правильною для будь-яких значень змінних, називають **тотожністю**.

ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТЕЙ

Довести тотожність можна одним з таких способів:

- ▼ виконати тотожні перетворення її лівої частини, тим самим звівши до вигляду правої частини;
- ▼ виконати тотожні перетворення її правої частини, тим самим звівши до вигляду лівої частини;
- ▼ виконати тотожні перетворення обох її частин, тим самим звівши обидві частини до однакових виразів.

СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Степінь числа a з натуральним показником n ($n > 1$) – це добуток n множників, кожний з яких дорівнює a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множників}}, n > 1.$$

Степінь числа a з показником 1 – це саме число a :

$$a^1 = a.$$

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^{m+n} = a^m a^n$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$a^{m-n} = a^m : a^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^n b^n = (ab)^n$$

ОДНОЧЛЕН

Цілі вирази – числа, змінні, їхні степені й добутки – називають **одночленами**.

Якщо одночлен є добутком, що має один числовий множник, який записано на першому місці, а інші множники є степенями різних змінних, то такий одночлен називають **одночленом стандартного вигляду**.

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, які він містить. Якщо одночлен не містить змінних (тобто є числом), то вважають, що його степінь дорівнює нулю.

МНОГОЧЛЕН

Многочленом називають суму одночленів.

Подібні доданки многочлена називають **подібними членами многочлена**, а зведення подібних доданків у многочлені – **зведенням подібних членів многочлена**.

Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називають **многочленом стандартного вигляду**.

ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Додавання і віднімання многочленів виконують, використовуючи правила розкриття дужок і зведення подібних доданків.

МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити цей одночлен на кожний член многочлена і знайдені добутки додати.

РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

Розкласти многочлен на множники означає подати його у вигляді добутку одночлена на многочлен або добутку кількох многочленів так, щоб цей добуток був тотожно рівним даному многочлену.

МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член одного многочлена помножити на кожний член іншого многочлена й одержані добутки додати.

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

КВАДРАТ СУМИ І КВАДРАТ РІЗНИЦІ

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

РІЗНИЦЯ КВАДРАТІВ

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

СУМА І РІЗНИЦЯ КУБІВ

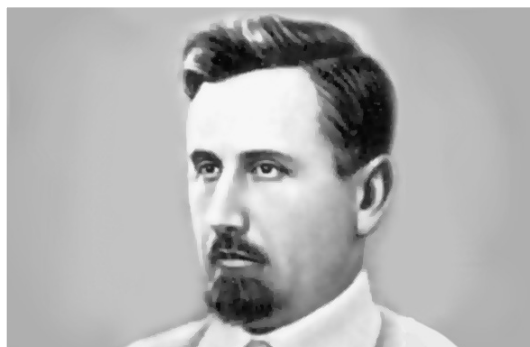
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Про фундаторів математичних олімпіад в Україні

Трохи раніше ви вже ознайомилися з історією математичного олімпіадного руху України, тепер детальніше розкажемо про його фундаторів, які більшу частину свого життя присвятили виявленню, вихованню та навчанню математично обдарованої молоді.

«Він жив і горів безмірною любов'ю до України і до математики й увесь свій короткий вік працював невпинно й творчо на благо науки, освіти рідного народу. Його лекції – це і сила, і безмірна глибочінь, і краса математичної думки». Ці слова про Михайла Пилиповича Кравчука до його 115-річчя написала Ніна Опанасівна Вірченко, українська вчена в галузі математики, докторка фізико-математичних наук, заслужена працівниця освіти України, професорка Національного технічного університету України «КПІ» (НТУУ КПІ).



Народився майбутній учений 27 вересня 1892 р. у с. Човниця на Волині. Навчався в Луцькій гімназії, яку в 1910 році закінчив із золотою медаллю, і вступив на математичне відділення фізико-математичного факультету Київського університету Св. Володимира (нині Київський національний університет імені Тараса Шевченка). У 1914 році М. Кравчук закінчує навчальний заклад і його залишають при університеті як професорського стипендіата для підготовки до наукової та викладацької роботи. Успішно склавши магістерські іспити в 1917 році, Михайло Кравчук одержує звання приват-доцента. І відтоді вся наукова, педагогічна та громадська діяльність Кравчука

Народився майбутній учений 27 вересня 1892 р. у с. Човниця на Волині. Навчався в Луцькій гімназії, яку в 1910 році закінчив із золотою медаллю, і вступив на математичне відділення фізико-математичного факультету Київського університету Св. Володимира (нині Київський національний університет імені Тараса Шевченка). У 1914 році М. Кравчук закінчує навчальний заклад і його залишають при університеті як професорського стипендіата для підготовки до наукової та викладацької роботи. Успішно склавши магістерські іспити в 1917 році, Михайло Кравчук одержує звання приват-доцента. І відтоді вся наукова, педагогічна та громадська діяльність Кравчука

пов'язана з Києвом. Він викладає математичні предмети у вперше створених у столиці українських гімназіях, Українському народному університеті. Був учителем Архипа Люльки, винахідника турбореактивного двигуна, та Сергія Корольова, авіаконструктора зі світовим ім'ям. На лекціях Михайла Пилиповича ніколи не було вільного місця, слухати його приходили і біологи, і хіміки, і філософи, і філологи, і робітники...

У 1919 році Кравчук опублікував перший переклад українською мовою підручника «Елементарна геометрія» А. П. Кисельова, російськомовного підручника, який на початку ХХ ст. отримав схвальну оцінку вчителів математики та проіснував більш як пів століття аж до перебудови шкільного курсу математики в СРСР. На початку 1920 року Михайла Пилиповича обрано членом комісії математичної термінології при Інституті наукової мови Української академії наук. На кінець того самого року ця комісія під головуванням М. Кравчука створила тритомний математичний словник. Пильне вивчення праць Михайла Кравчука під мовно-термінологічним кутом зору й нині може прислужитися такій актуальній справі, як подальша розробка та вдосконалення української математичної термінології.

Вільно володіючи кількома мовами (французькою, німецькою, італійською, польською, російською), він писав ними свої наукові праці, але найчастіше – рідною мовою, і ця його мова – гідний зразок українського науково-математичного стилю.

У 1924 році Михайло Пилипович Кравчук блискуче захистив докторську дисертацію. Це був перший в Україні захист докторської дисертації. У 1925 році Михайлові Кравчукові присвоїли звання професора, а в 1929 році його обрали дійсним членом Всеукраїнської академії наук. У віці 37 років він став наймолодшим академіком в Україні. Математичні інтереси Михайла Пилиповича – розмаїті, його наукові праці відзначались оригінальністю ідей, нестандартністю підходів

до відомих і нових математичних проблем. Своєрідність та гнучкість мислення, висока продуктивність та працездатність, ерудованість, вимогливість та наукова щедрість, відданість науці М. Кравчука викликали захоплення його учнів та послідовників, коло яких значно з року в рік розширювалось.

Вісім років, з 1929-го по 1937-й, були найпліднішими у творчості та наукових здобутках М. Кравчука. Він одержує низку вагомих результатів у різних розділах математики, зокрема і в теорії многочленів, видає підручники для вищої школи, ініціює проведення першої в Україні шкільної математичної олімпіади, неперервно працює над удосконаленням математичної термінології. Результати своїх досліджень друкує не тільки в наукових виданнях України, а й за кордоном: в Італії, Франції, Німеччині.

Але подальша доля Михайла Пилиповича склалася трагічно. У СРСР почалися сталінські репресії. У 1938 році тяжка година випробовувань настала і для нього. Його заарештовують, інкримінуючи стандартний на той час набір злочинів: український націоналізм, шпигунство, контрреволюційну діяльність. Через це у вересні 1938 р. Михайла Кравчука засудили до 20 років тюремного ув'язнення і 5 років заслання та відправили в тюремні табори на Колиму. Три каторжні зими і літа відбув він там, хворий і пригнічений несправедливістю. А 9 березня 1942 року його не стало. Залишився Михайло Кравчук на віки вічні в колимській мерзлоті поряд з поетом-неокласиком Михайлом Драй-Хмарою, що за кілька літ до нього спочив у тій далекій землі, поряд з тисячами інших закатованих представників інтелігенції. І лише в 1956 році Михайла Пилиповича було реабілітовано.

У 1992 році, після здобуття незалежності, Україна відзначила 100-річчя від дня народження М. П. Кравчука. Його ім'я було занесено в Міжнародний календар ЮНЕСКО визначних наукових діячів. У Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут» періодично про-

ходять міжнародні наукові конференції, присвячені пам'яті академіка Михайла Кравчука, у яких беруть участь учені з усіх областей України, з Литви, Австралії, США, Німеччини, Польщі, Китаю, Японії та інших країн.

Пам'ять про Михайла Пилиповича Кравчука увічнено в назві однієї з київських вулиць, на батьківщині вченого відкрито його музей. У НТУУ КПІ засновано стипендію його імені, а на території цього вишу відкрито пам'ятник ученому, на постаменті якого викарбовано його життєве кредо: «Моя любов – Україна і математика».

Історія знає приголомшливі приклади, коли таємниці науки підкорялися юним дослідникам.

Видатного математика і фізика-теоретика Миколу Миколайовича Боголюбова (1909–1993) було зараховано до аспірантури, коли йому ще не виповнилося і 15 років. У 17 років за досягнення в математиці йому присвоїли ступінь кандидата наук. Ще через два роки його наукові праці було відзначено нагородою Болонської академії наук (Італія), а у 20 років за визначні досягнення в галузі математики за рішенням Всеукраїнської академії наук йому було присвоєно науковий ступінь доктора фізико-математичних наук без захисту дисертації.



Народився Микола Боголюбов у Нижньому Новгороді (Росія), але більшу частину свого життя і наукової діяльності він провів в Україні. Коли Миколі виповнився рік, його родина переїхала до Києва. З юних років Микола самостійно опрацьовує курси вищої математики та фізики, і тринадцятирічному хлопцю з надзвичайними здібностями дозволяють відвідувати лекції в Київсько-

му університеті. З великим захопленням юнак вивчає тут математику, фізику, астрономію, бере участь у роботі наукових семінарів. З 1923 року його заняттями з математики керує відомий учений, математик і механік М. М. Крилов (1879–1955). Понад два десятиліття Микола Миколайович Боголюбов керував проведенням учнівських математичних олімпіад у Києві та Україні, був професором Київського і Московського університетів, працював в Академії наук УРСР, у Математичному інституті ім. В. А. Стеклова, Академії наук СРСР, Міжнародному науковому центрі ядерно-фізичних досліджень – Об'єднаному інституті ядерних досліджень у м. Дубна (Росія).



З українськими математичними олімпіадами нерозривно пов'язане ім'я ще однієї неперевершеної особистості – Михайла Йосиповича Ядренка (1932–2004), який щороку до останніх своїх днів очолював журі Всеукраїнської учнівської олімпіади.

Надзвичайно плідним є його життєвий шлях. Народився в с. Дрімайлівка Чернігівської області. За словами самого Михайла Йосиповича, його першими підручниками були буквар та «Кобзар» Шевченка. Навчаючись у школі, він твердо вирішив стати математиком. У березні 1950 р. Михайло почув по радію оголошення, що в Київському університеті має відбутися математична олімпіада, і, маючи бажання взяти в ній участь, написав до університету листа із запитанням про таку можливість для школярів не з Києва. Через деякий час отримав відповідь із запрошенням узяти в ній участь. Тоді Михайло посів у цих змаганнях 2-ге місце з-поміж учнів 10 класу. Того ж року він закінчив школу із золо-

тою медаллю та вступив до Київського університету на механіко-математичний факультет, а після його закінчення – до аспірантури. Захистив кандидатську і докторську дисертації. Ще будучи аспірантом, він бере активну участь в організації Київських математичних олімпіад та підготовці конкурсних задач. А з 1970 року стає головою журі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

Працювати зі школярами, розшукувати і підтримувати талановиту молодь було покликанням ученого.

Понад 40 років свого життя Михайло Йосипович віддав розвитку шкільної математичної освіти, виданню посібників і задачників з математики, титанічній праці з виховання математично здібної молоді. У 2010 році на честь Михайла Йосиповича названо Всеукраїнський турнір юних математиків (ТЮМ), ще одне не менш популярне за олімпіаду математичне змагання всеукраїнського рівня.

Усе своє життя він пропрацював у Київському університеті, більш ніж 30 років завідував кафедрою теорії ймовірностей та математичної статистики механіко-математичного факультету. Під його керівництвом 45 аспірантів захистили дисертації, 10 стали докторами наук. У 1990 році Михайла Йосиповича було обрано членом-кореспондентом Національної академії наук України.

Неможливо перелічити всі громадські обов'язки Михайла Йосиповича. Зокрема, він був віцепрезидентом Українського математичного товариства, членом Бюро відділення математики НАН України, редактором низки наукових журналів.

Плідну наукову, педагогічну, методичну і громадську роботу Михайло Йосипович вів до останнього дня свого життя, яке обірвалося 28 вересня 2004 року.

Його донька Ольга у своїх спогадах про батька зазначала: «Усе своє життя батько присвятив людям, математиці, Україні...».

РОЗДІЛ 3

ФУНКЦІЇ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **ознайомитесь** з поняттями функції та її графіка, лінійної функції;
- **дізнаєтеся** про способи задання функцій;
- **навчитесь** знаходити область визначення та область значень деяких функцій, будувати графік лінійної функції.

§ 22. Функція. Область визначення та область значень функції. Способи задання функцій. Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів

Поняття функції

У житті ми часто стикаємося із залежностями між різними величинами. Наприклад, периметр квадрата залежить від довжини його сторони, площа прямокутника – від його вимірів, маса шматка крейди – від його об'єму, відстань, яку долає рухомий об'єкт, – від його швидкості та часу руху тощо.

Розглянемо приклади *залежностей між двома величинами*.

Приклад 1. Нехай сторона квадрата дорівнює a см, а його периметр дорівнює P см. Для кожного значення змінної a можна знайти відповідне значення змінної P . Наприклад,

$$\text{якщо } a = 5, \text{ то } P = 4 \cdot 5 = 20;$$

$$\text{якщо } a = 8, \text{ то } P = 4 \cdot 8 = 32;$$

$$\text{якщо } a = 1,2, \text{ то } P = 4 \cdot 1,2 = 4,8.$$

Отже, периметр квадрата залежить від довжини його сторони. Математичну модель цієї залежності можна записати у вигляді формули $P = 4a$.

Оскільки кожному значенню довжини сторони квадрата відповідає певне значення його периметра, то кажуть, що маємо *відповідність* між довжиною сторони квадрата і його периметром (або *залежність між змінними a і P*). При цьому вважають, що значенню $a = 5$ відповідає значення $P = 20$, або значення $P = 20$ є *відповідним* значенню $a = 5$.

Змінну a , значення якої вибирають довільно, називають **незалежною змінною**, а змінну P , кожне значення якої залежить від вибраного значення a , – **залежною змінною**.

Приклад 2. Нехай автомобіль рухається зі сталою швидкістю 80 км/год. Відстань, яку він при цьому подолає, залежить від часу його руху.

Позначимо час руху автомобіля (у годинах) через t , а відстань, яку він подолав (у кілометрах), – через s . Для кожного значення змінної t ($t \geq 0$) можна знайти відповідне значення s . Наприклад,

$$\text{якщо } t = 1,5, \text{ то } s = 80 \cdot 1,5 = 120;$$

$$\text{якщо } t = 3, \text{ то } s = 80 \cdot 3 = 240;$$

$$\text{якщо } t = 4,5, \text{ то } s = 80 \cdot 4,5 = 360.$$

Залежність змінної s від змінної t можна задати формулою $s = 80t$, де t – незалежна змінна, а s – залежна змінна.

У математиці зазвичай незалежну змінну позначають буквою x , а залежну змінну – буквою y . У прикладах, які ми розглянули, кожному значенню незалежної змінної відповідає *лише одне значення* залежної змінної.

Якщо кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, то таку залежність називають *функціональною залежністю*, або *функцією*.

Незалежну змінну ще називають **аргументом**, а про залежну змінну кажуть, що вона є **функцією** від цього аргументу. У згаданих вище прикладах – периметр квадрата P є функцією від довжини його сторони a , а відстань s , яку подолав автомобіль зі сталою швидкістю, є функцією від часу руху t . Значення залежної змінної називають **значенням функції**.

Область визначення та область значень функції

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють **область визначення функції**.

Усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють **область значень функції**.

Наприклад, областю визначення функції у прикладі 1 є всі додатні числа a , тобто $a > 0$.

Областю визначення функції у прикладі 2 є всі невід'ємні числа t , тобто $t \geq 0$.

Область значень функції у прикладі 1 складається з усіх додатних чисел P , а область значень функції у прикладі 2 – з усіх невід'ємних чисел s , тобто $s \geq 0$.

Приклад 3. Функцію задано формулою $y = \frac{8}{x-2}$. Знайти:

- 1) область визначення функції;
- 2) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -2 ; 6 ; 10 ;
- 3) значення аргументу, за якого значення функції дорівнює -1 .

Розв'язання. 1) Областю визначення функції є всі такі значення x , для яких дріб $\frac{8}{x-2}$ має зміст. Знаменник дробу дорівнює нулю для $x = 2$. Отже, областю визначення функції

є всі числа, крім числа 2. Домовимся, що в таких випадках можна записувати: « $x \neq 2$ », маючи на увазі, що всі значення, крім числа 2, утворюють область визначення функції.

2) Якщо $x = -2$, то $y = \frac{8}{-2-2} = \frac{8}{-4} = -2$; якщо $x = 6$, то

$y = \frac{8}{6-2} = 2$; якщо $x = 10$, то $y = \frac{8}{10-2} = 1$.

3) Щоб знайти x , для якого $y = -1$, потрібно у формулу функції замість y підставити число -1 . Тоді матимемо рівняння:

$-1 = \frac{8}{x-2}$, коренем якого є число -6 .

Отже, значення $y = -1$ функція набуває для $x = -6$.

Способи задання функції

Задавати функцію можна різними способами. У прикладах, які ми розглянули, функції задано формулами: $P = 4a$;

$s = 80t$; $y = \frac{8}{x-2}$. Такий спосіб задання функції є досить

зручним, бо дає змогу для довільного значення аргументу знаходити відповідне йому значення функції, та компактним, оскільки в більшості випадків формула має короткий запис.

Трапляються і функції, які для різних значень аргументу задаються різними формулами. Розглянемо таку функцію, її запис та як з нею працювати.

Приклад 4. Нехай дано функцію $y = \begin{cases} 2x - 7, & \text{якщо } x \leq -2; \\ x^2 + 1, & \text{якщо } x > -2. \end{cases}$

Цей запис означає, що для значень аргументу x таких, що $x \leq -2$, значення функції обчислюють за формулою $y = 2x - 7$, а для значень аргументу x таких, що $x > -2$, – за формулою $y = x^2 + 1$.

Наприклад, якщо $x = -3$, то $y = 2 \cdot (-3) - 7 = -13$;
якщо $x = -2$, то $y = 2 \cdot (-2) - 7 = -11$;
якщо $x = 0$, то $y = 0^2 + 1 = 1$;
якщо $x = 5$, то $y = 5^2 + 1 = 26$.

Задавати функцію можна й *таблицею*. Такий спосіб задання функції називають *табличним*. Розглянемо його на прикладі.

Приклад 5. Щогодини, починаючи з восьмої і до тринадцятої, вимірювали атмосферний тиск і отримані значення записували в таблицю:

Час t , год	8	9	10	11	12	13
Атмосферний тиск p , мм рт. ст.	753	754	756	754	753	752

Таблиця задає відповідність між часом вимірювання t і атмосферним тиском p . Ця відповідність є функцією, бо кожному значенню змінної t відповідає єдине значення змінної p . У цьому прикладі t є незалежною змінною, а p – залежною змінною. Область визначення функції складається із чисел 8; 9; 10; 11; 12; 13 (перший рядок таблиці), а область значень – із чисел 752; 753; 754; 756 (другий рядок таблиці).

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для знаходження значень функції не потрібно нічого обчислювати. Незручним є те, що таблиця зазвичай займає багато місця і може не містити саме того значення аргументу, яке нас цікавить, наприклад, якщо його немає в першому рядку таблиці. Зокрема, у прикладі 5 неможливо знайти значення функції, що відповідає значенню аргументу, наприклад, 8,5 або 14.

Задавати функцію можна також висловленням. Такий спосіб задання функції називають *описовим*, або *словесним*.

Приклад 6. Кожному натуральному числу поставимо у відповідність квадрат цього числа. Одержимо функцію, область

визначення якої складається з усіх натуральних чисел, а область значень – з квадратів цих чисел.

Функціональна залежність як математична модель реальних процесів

Ми вже розглядали задачі практичного змісту, математичними моделями яких є рівняння. Моделями реальних процесів можуть бути і функціональні залежності.

Функціональні залежності, які ми розглянули у прикладах 2 і 5, є математичними моделями реальних процесів: модель руху автомобіля зі сталою швидкістю, модель вимірювання атмосферного тиску протягом деякого часу.

Надалі під час вивчення алгебри ми будемо неодноразово звертатися до математичних моделей реальних процесів.

А ще раніше...

Функція – одне з найважливіших понять сучасної математики.

Залежності між різними величинами цікавили ще давніх математиків. Зокрема, у Вавилоні було складено таблиці квадратів і кубів чисел, таблиці сум і добутків двох чисел, у Греції – знайдено співвідношення між елементами кола. У працях І. Ньютона, Р. Декарта, Г. Лейбніца, П. Ферма розглядалося багато функціональних залежностей, пов'язаних з геометрією та фізикою. Так, французькі математики П'єр Ферма (1601–1665) та Рене Декарт (1596–1650) розглядали функцію як залежність ординати точки кривої від її абсциси. Рене Декарт використовував поняття змінної величини.



Б. Больцано
(1781–1848)

Термін «функція» (від латинського *functio* – виконання, звершення) для назви залежностей уперше ввів Готфрід Лейбніц (1646–1716). Він пов'язував функцію з графіками.

Швейцарські математики Йоганн Бернуллі (1667–1748) та його видатний учень Леонард Ейлер (1707–1783) розглядали функцію як аналітичний вираз, тобто вираз, утворений із змінних і чисел за допомогою тих чи тих аналітичних операцій (дій).



П. Г. Діріхле
(1805–1859)

Поняття функції як залежності однієї змінної від іншої ввів чеський математик Берnard Больцано, а узагальнив – німецький математик Петер Густав Діріхле.

Найзагальніше сучасне означення функції було запропоновано в середині ХХ ст. Свій внесок у становлення цього поняття в ці часи зробили математики М. Гюнтер, І. Гельфанд, С. Соболев, Г. Шілов.

- ? Наведіть приклади функціональної залежності однієї змінної від іншої, назвіть у них незалежну змінну і залежну. ● Що називають функцією, аргументом функції, значенням функції? ● Що називають областю визначення функції і що – областю значень функції? ● Які є способи задання функції? ● Наведіть власний приклад функції, заданої формулою. ● Наведіть власний приклад функціональної залежності між величинами, що є математичною моделлю реальних процесів.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1 973. (Усно.) Чи залежить периметр рівностороннього трикутника від довжини його сторони? Чи є периметр цього трикутника функцією від довжини сторони трикут-

ника? Якщо так, то задайте цю функцію формулою за умови, що сторона трикутника дорівнює a .

974. (Усно.) Які з даних записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) та залежну змінну:

- 1) $a = 4b + 2$; 2) $4 + 2x = 2x - 7$; 3) $y = \frac{1}{4x - 1}$;
4) $18 : 3 - 6 = 0$; 5) $p = t - t^3 - 2$; 6) $4a - 2 > 0$.

975. Які з даних записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) та залежну змінну:

- 1) $m = 5n^2 - 2$; 2) $y = x^2 - x + 2$; 3) $40 - 30 > 5$;
4) $4x - 1 = 7 - 4x$; 5) $d = \frac{m - 1}{m^2 + 1}$; 6) $3 \cdot 8 = 2 \cdot 12$.

976. (Усно.) Площу круга знаходять за формулою $S = \pi r^2$, де r – радіус круга. Чи задає ця формула функцію? Якщо так, укажіть її аргумент та область визначення.

977. Площа прямокутника зі сторонами x см і 8 см дорівнює S . Виразіть формулою залежність S від x . Чи задає ця формула функцію?

2 **978.** Об'єм куба з ребром a см дорівнює V см³. Виразіть формулою залежність V від a . Чи задає ця формула функцію? Знайдіть за цією формулою значення V , якщо:

- 1) $a = 5$; 2) $a = 7$; 3) $a = \frac{3}{4}$.

979. Периметр прямокутника зі сторонами x дм і 6 дм дорівнює P дм. Запишіть формулу залежності P від x . Для значень аргументу $x = 2; 4; 5; 15$ знайдіть відповідні значення функції P .

980. (Усно.) Функцію задано формулою $y = -2x$.

- 1) Яка змінна є незалежною, а яка – залежною?
2) Знайдіть значення функції, що відповідають значенням аргументу $-3; 0; 8$.

981. Обчисліть значення функції, заданої формулою $y = 5x - 7$, для значень аргументу, що дорівнюють $-2; 0; 5; 10$.

982. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = \frac{20}{x}$, для значень аргументу, що дорівнюють $-40; -10; 4; 5$.

983. Функцію задано формулою $y = -\frac{6}{x}$. У таблиці наведено значення її аргументу. Відтворіть цю таблицю в зошиті й заповніть її, обчисливши відповідні значення функції:

x	-12	-6	-5	-3	2	4	8	10
y								

984. Функцію задано формулою $y = 4x + 3$. У таблиці наведено значення її аргументу. Відтворіть цю таблицю в зошиті й заповніть її, обчисливши відповідні значення функції:

x	-7	-5	-3	-1	2	4	6	8
y								

985. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^2 - 3$, для значень аргументу $-3; -2; -1; 0; 1; 2$.

986. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = 5 - x^2$, для значень аргументу $-2; -1; 0; 1; 2; 3$.

987. Поїзд, рухаючись зі швидкістю 65 км/год, долає за t год відстань s км. Задайте формулою залежність s від t . Обчисліть значення функції, які відповідають значенням аргументу, що дорівнюють $1; 2,4; 3; 5,8$.

988. Кожному натуральному значенню n відповідає втричі більше за нього число N . Задайте формулою залежність N від n . Знайдіть значення функції, що відповідають значенням аргументу $2; 7; 13; 20$.

989. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 3x - 5$; 2) $y = \frac{2x + 3}{5}$; 3) $y = \frac{8}{x}$; 4) $y = \frac{7}{x + 2}$.

990. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 2x + 3$; 2) $y = \frac{8x - 3}{7}$; 3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x - 3}$.

991. Знайдіть значення аргументу, для якого:

- 1) функція $y = -3x$ набуває значення -6 ; 9 ; 15 ;
- 2) функція $y = 5x - 1$ набуває значення -1 ; 4 ; 14 .

992. Знайдіть значення аргументу, для якого:

- 1) функція $y = 4x$ набуває значення -8 ; 0 ; 12 ;
- 2) функція $y = 3 - 2x$ набуває значення -1 ; 3 ; 17 .

993. Функцію задано таблицею:

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-3	-1	2	7

- Знайдіть: 1) значення функції для $x = -2$; 0 ; 1 ;
2) значення аргументу, для якого значення функції дорівнює -3 ; 2 ; 7 ;
3) область визначення функції;
4) область значень функції.

994. Функцію задано таблицею:

x	1	2	3	4	5
y	-2	0	2	5	7

- Знайдіть:
1) значення функції для значень аргументу 1 ; 3 ; 4 ;
2) значення аргументу, для якого $y = 0$; 5 ; 7 ;
3) область визначення функції;
4) область значень функції.

- 3** 995. Функцію задано формулою $y = \frac{3}{4}x$. Відтворіть таблицю в зошиті й заповніть її порожні комірки:

x	-8		1,6		20,8		
y		-9		$-\frac{3}{8}$		$1\frac{5}{7}$	20,7

996. Функцію задано формулою $y = \frac{3}{5}x$. Відтворіть таблицю в зошиті й заповніть її порожні комірки:

x	-10		0		8,5	
y		-1,2		$\frac{3}{5}$		13,5

997. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

$$1) y = \frac{5}{x^2 - 9};$$

$$2) y = \frac{17}{x^2 + 4};$$

$$3) y = \frac{9}{x(x - 3)};$$

$$4) y = \frac{7x + 1}{x^2 + x};$$

$$5) y = \frac{9}{(x - 1)(x + 4)};$$

$$6) y = \frac{15}{x - 2} + \frac{7}{x + 3}.$$

998. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{7}{x^2 - 4};$$

$$2) y = \frac{13}{x^2 + 1};$$

$$3) y = \frac{14}{(x + 2)x};$$

$$4) y = \frac{9}{x^2 - x};$$

$$5) y = \frac{7}{(x + 5)(x - 3)};$$

$$6) y = \frac{14}{x + 3} + \frac{7}{x - 1}.$$

999. Початкова температура води була $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Під час нагрівання вона щохвилини підвищувалася на $5\text{ }^{\circ}\text{C}$.

1) Задайте формулою залежність температури води T від часу t її нагрівання.

2) Знайдіть значення T , що відповідає значенню аргументу $t = 7; 9; 10$.

3) Знайдіть значення t , яким відповідає $T = 45; 60; 70$.

4) Знайдіть значення t , за якого вода закипить.

1000. Велосипедистка зупинилася на відстані 10 км від міста. А через деякий час продовжила рух зі швидкістю 15 км/год .

1) Задайте формулою залежність відстані s (у км), яку загалом пододала велосипедистка, від часу t (у год), який відраховується після зупинки.

2) Знайдіть значення s , що відповідає значенню $t = 1; 2; 5$.

3) Знайдіть значення t , для якого $s = 34; 55; 70$.

1001. У таблиці подано залежність функції y від аргументу x .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-3	-2	1	-3	5	1	6	-2	-3

Знайдіть: 1) значення y , якщо $x = -4; -1; 0; 3$;

2) значення x , яким відповідає $y = -3; -2; 5$;

3) значення x , якому відповідає рівне йому значення y ;

4) область визначення функції;

5) область значень функції.

1002. У таблиці подано залежність функції y від аргументу x .

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
y	-1	2	4	2	4	7	2	-1	9

Знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -8; -2; 4; 6$;
- 2) значення x , яким відповідає $y = -1; 4; 7$;
- 3) значення x , якому відповідає протилежне до x значення y ;
- 4) область визначення функції;
- 5) область значень функції.

1003. Складіть таблицю значень функції $y = 0,6 - 0,3x$, де $-2 \leq x \leq 5$, з кроком, що дорівнює 1. Використовуючи цю таблицю, укажіть:

- 1) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює 0;
- 2) значення аргументу, для якого значення функції дорівнює 0.

4 **1004.** Знайдіть значення функції для $x = -5; 0; 3$, якщо:

$$1) y = \begin{cases} 4x - 3, & \text{якщо } x < 0, \\ -2x, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 7, & \text{якщо } x \leq 1, \\ x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

1005. Знайдіть значення функції для значення аргументу, яке дорівнює $-2; 0; 4$, якщо:

$$1) y = \begin{cases} 7x - 2, & \text{якщо } x \leq 0, \\ -3x, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} 3, & \text{якщо } x \leq 2, \\ -x^2, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

1006. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 + 2x + 5$.

Вправи для повторення

1007. Обчисліть: $\frac{8}{15} \cdot 0,5625 - \left(\frac{11}{24} + 1 \frac{13}{36} \right) \cdot 1,44 + 2 \frac{8}{25}$.

1008. Якими одночленами потрібно заповнити клітинки, щоб рівність перетворилася на тотожність:

1) $(3x - 2y)(\square + \square) = 9x^2 - 4y^2$;

2) $(5m + \square)(5m - \square) = 25m^2 - 36$;

3) $(7c^2 - \square)(\square + 3p) = 49c^4 - 9p^2$;

4) $(4m + 9a^2)(\square - \square) = 81a^4 - 16m^2$?

1009. Сторона квадрата на 4 см більша за одну сторону прямокутника і на 5 см менша за другу. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа на 10 см^2 більша за площу прямокутника.



Життєва математика

1010. Відомо, що 60 кг макулатури зберігають одне дерево. Учні сьомих класів школи зібрали 300 кг макулатури. Скільки дерев зберегли учні?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

1011. У трьох коробках лежать кульки: у першій – дві білого кольору (ББ), у другій – дві чорного кольору (ЧЧ), у третій – білого й чорного (БЧ). На коробках є таблички з написами: ББ, ЧЧ і БЧ, але вміст жодної з коробок не відповідає напису на її табличці. З якої коробки достатньо навмання взяти лише одну кульку, щоб визначити колір кульок, які лежать у кожній коробці?

§ 23. Графік функції. Графічний спосіб задання функції

Поняття про графік функції

У 6 класі ми вже розглядали графік залежності між двома величинами. Розглянемо, що таке **графік функції**.

Приклад 1. Нехай дано функцію $y = \frac{6}{x+3}$, де $-2 \leq x \leq 3$.

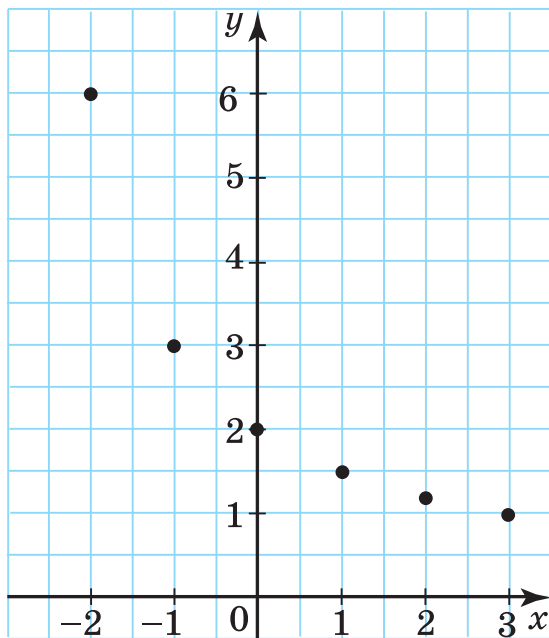
Знайдемо значення цієї функції для цілих значень аргументу й результати запишемо в таблицю:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	1,5	1,2	1

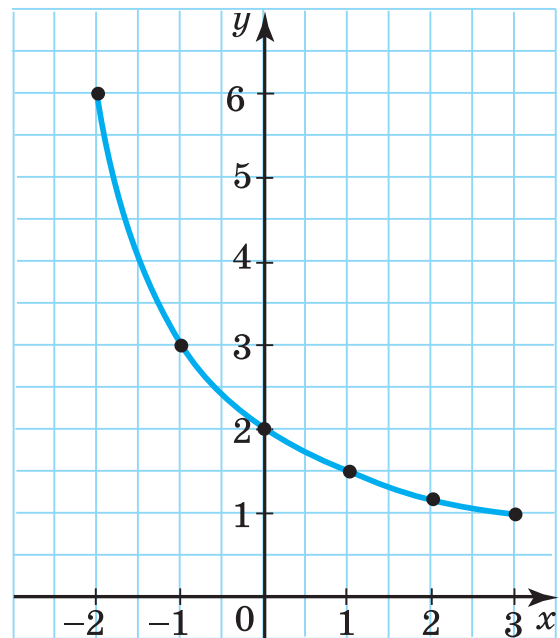
Позначимо на координатній площині точки $(x; y)$, координати яких візьмемо з таблиці. Це точки $(-2; 6)$, $(-1; 3)$, $(0; 2)$, $(1; 1,5)$, $(2; 1,2)$, $(3; 1)$ (мал. 23.1). Якщо взяти інші значення x з проміжку від -2 до 3 і за формулою $y = \frac{6}{x+3}$ обчислити відповідні

їм значення y , то одержимо інші пари значень x і y . Кожній із цих пар відповідає певна точка координатної площини. Усі такі точки утворюють фігуру, яку називають *графіком*

функції $y = \frac{6}{x+3}$, де $-2 \leq x \leq 3$ (мал. 23.2).



Мал. 23.1



Мал. 23.2

Графіком функції називають фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких – значення аргументу, а ординати – відповідні значення функції.

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = x^2 - 1$, якщо $-3 \leq x \leq 2$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень функції для цілих значень аргументу:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	8	3	0	-1	0	3

Позначимо точки, координати яких подано в таблиці, на координатній площині та сполучимо їх плавною лінією (мал. 23.3). Одержимо графік функції $y = x^2 - 1$ для $-3 \leq x \leq 2$.

Зауважимо: що меншим буде крок (відстань) між значеннями аргументу, то щільніше розташуються точки на координатній площині, а отже, більш точним буде побудований графік.

Визначення окремих характеристик функції за її графіком

За графіком можна одразу вказати, для яких значень аргументу значення функції додатні, для яких – від'ємні, для яких дорівнюють нулю. За графіком можна також установити область визначення та область значень функції.

Нулем функції називають таке значення аргументу, для якого значення функції дорівнює нулю.

Зрозуміло, що нулі функції – це абсциси точок перетину графіка функції з віссю абсцис, бо ордината – це значення функції, і саме в цих точках вона дорівнює нулю.

Приклад 3. Використовуючи графік функції $y = x^2 - 1$, де $-3 \leq x \leq 2$, знайти: 1) нулі функції; 2) область значень функції; 3) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень; 4) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.

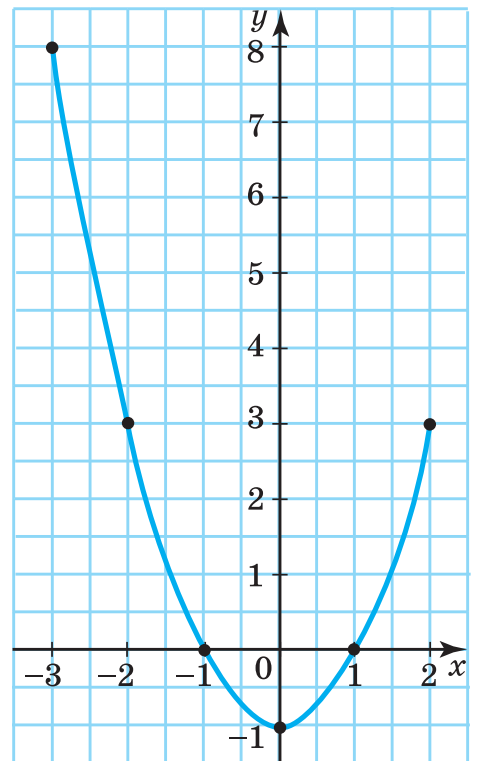
Розв'язання. Графік функції $y = x^2 - 1$ зображено на малюнку 23.3.

1) Нулі функції – це абсциси точок перетину графіка функції з віссю x . Отже, $x = -1$ і $x = 1$ – нулі функції. Зауважимо, що нулі функції можна знайти, і не використовуючи графік даної функції. Наприклад, достатньо розв'язати рівняння $x^2 - 1 = 0$.

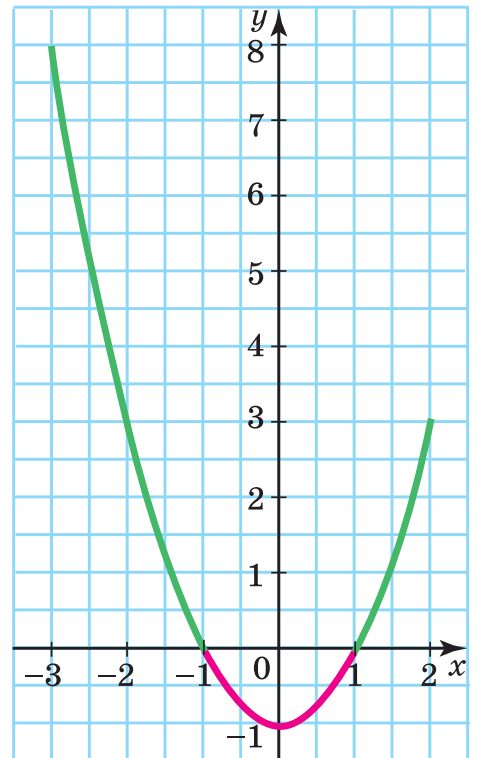
2) Функція може набувати будь-яких значень від -1 до 8 . Тому областю значень функції є всі такі значення y , що $-1 \leq y \leq 8$.

3) Для значень x таких, що $-3 \leq x < -1$, точки графіка лежать вище від осі абсцис. Тому функція набуває додатних значень для $-3 \leq x < -1$. На мал. 23.4 цю частину графіка позначено зеленим кольором.

Так само вище від осі абсцис лежать точки графіка для $1 < x \leq 2$. Тому для $1 < x \leq 2$ функція знову набуває додатних значень (на мал. 23.4 цю частину графіка також позначено зеле-



Мал. 23.3



Мал. 23.4

ним кольором). Отже, для $-3 \leq x < -1$ та $1 < x \leq 2$ функція набуває додатних значень.

4) Для значень x таких, що $-1 < x < 1$, точки графіка лежать нижче від осі абсцис (на мал. 23.4 цю частину графіка позначено червоним кольором). Тому для $-1 < x < 1$ функція набуває від'ємних значень.

Графічний спосіб задання функції

Використовуючи графік функції, для будь-якого значення аргументу з області визначення можна знайти відповідне йому значення функції. Також за графіком можна скласти таблицю значень функції.

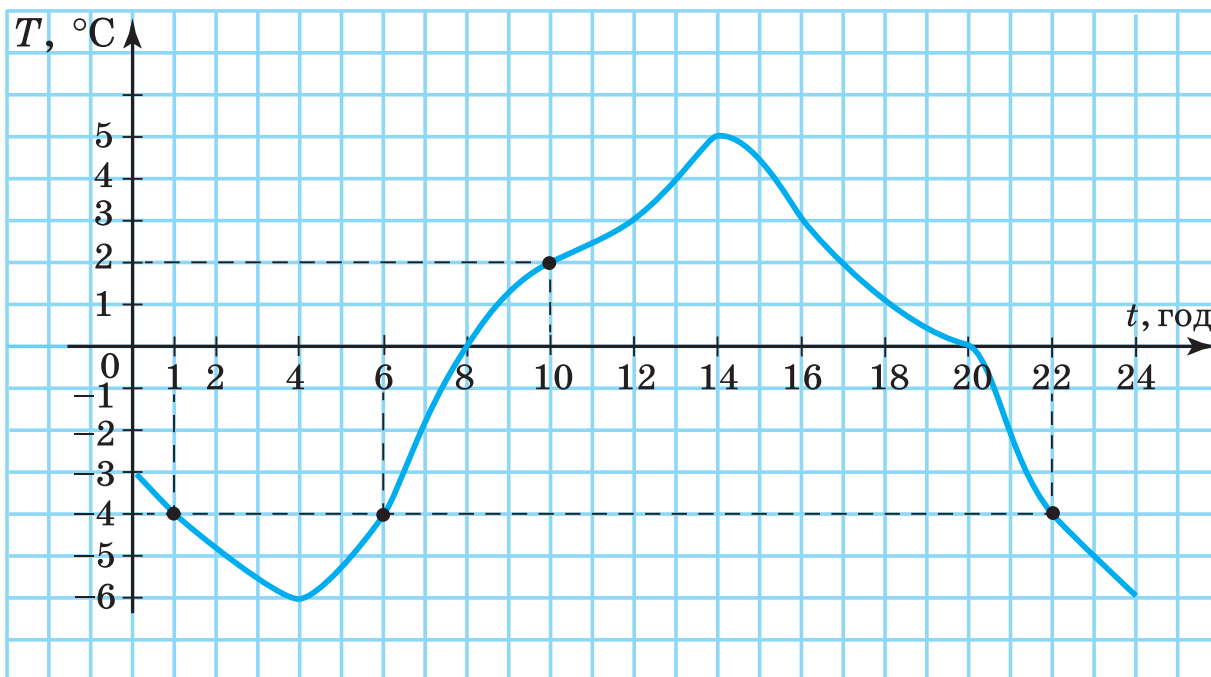
Так, доходимо висновку, що *функцію можна задати графіком*. Цей спосіб задання функції називають *графічним*. Він є зручним своєю наочністю, тому його часто використовують для відображення явищ, які супроводжують практичну діяльність людини або відбуваються в навколишньому світі.

Приклад 4. На малюнку 23.5 зображено графік зміни температури повітря протягом доби, одержаний за допомогою спеціального приладу – термографа. Використовуючи цей графік, знайти:

- 1) якою була температура о 10 год;
- 2) о котрій годині температура була -4 °С.

Розв'язання. 1) Через точку осі t з координатами $(10; 0)$ проведемо перпендикуляр до цієї осі (мал. 23.5). Точка перетину цього перпендикуляра з графіком температури має координати $(10; 2)$. Отже, о 10 год температура повітря була 2 °С.

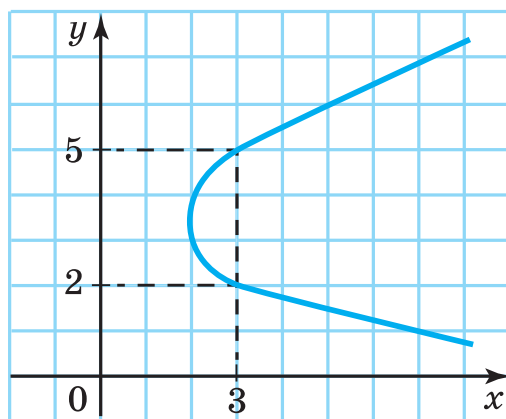
2) Через точку осі T з координатами $(0; -4)$ проведемо перпендикуляр до цієї осі (мал. 23.5). Цей перпендикуляр перетинає графік у точках $(1; -4)$, $(6; -4)$ і $(22; -4)$. Отже, температура повітря -4 °С була о 1 год, о 6 год і о 22 год.



Мал. 23.5

Зауважимо, що не кожна фігура на координатній площині є графіком деякої функції. Наприклад, фігура на малюнку 23.6 не є графіком жодної з функцій, оскільки існують такі значення x , яким відповідають два значення y . Наприклад, значенню $x = 3$ відповідають значення $y = 2$ і $y = 5$.

Це означає, що залежність між x і y , графік якої зображено на малюнку 23.6, не є функціональною через те, що існує хоча б одне значення x , якому відповідає більш ніж одне значення y . Графічно це означає, що існує хоча б одна пряма, перпендикулярна до осі абсцис, яка перетинає цю фігуру більше ніж в одній точці. Враховуючи, що при функціональній залежності кожному значенню аргументу ставиться у відповідність єдине значення функції, то



Мал. 23.6

кожна пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має перетинати графік функції не більше ніж в одній точці.

Отже,

! щоб фігура, яку зображено на координатній площині, була графіком деякої функції, необхідно, щоб кожна пряма, перпендикулярна до осі абсцис, перетинала цю фігуру не більше ніж в одній точці.

? Що таке графік функції? ● Як побудувати графік функції? ● Поясніть, як за графіком знайти значення функції, що відповідає даному значенню аргументу, та значення аргументу, якому відповідає дане значення функції (на прикладі одного з графіків на мал. 23.2, 23.3 і 23.5). ● Як з'ясувати, що фігура на координатній площині є графіком функції?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2 **1012.** На малюнку 23.7 зображено графік функції. За графіком:

1) заповніть у зошиті таблицю:

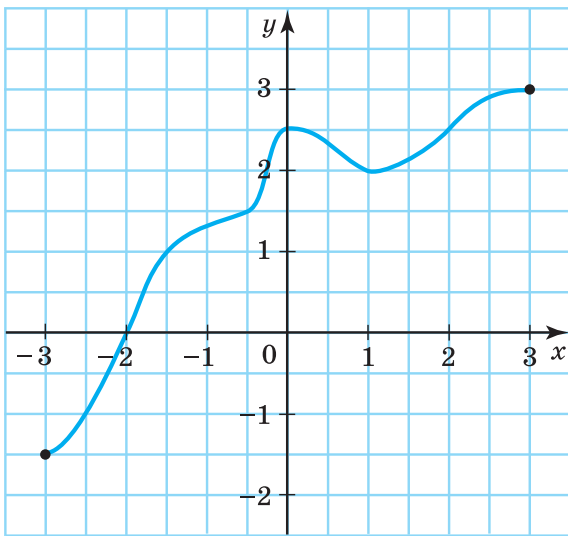
x	-3	-2,5	-2	-1,5	-0,5	0	1	2	3
y									

2) знайдіть область визначення та область значень функції.

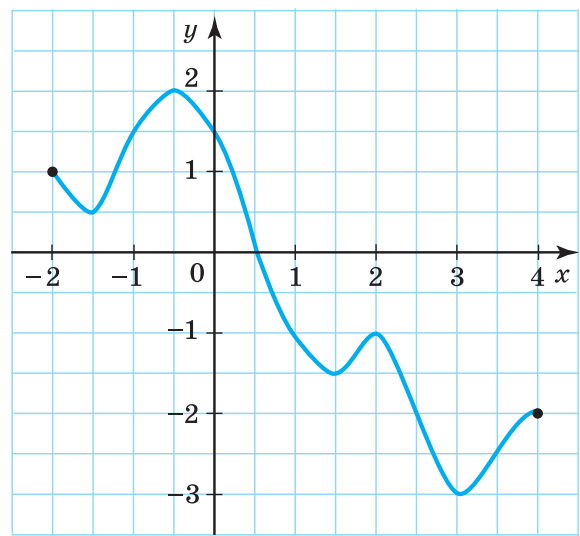
1013. На малюнку 23.8 зображено графік функції. За графіком:

1) заповніть у зошиті таблицю:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y													



Мал. 23.7



Мал. 23.8

2) знайдіть область визначення та область значень функції.

1014. Побудуйте графік функції $y = x - 3$, де $-2 \leq x \leq 5$, склавши таблицю для цілих значень аргументу.

1) Чи належить графіку функції точка $A(3; 0)$; точка $B(-1; 2)$?

2) Знайдіть за графіком значення функції, якщо $x = 2$; $x = 4$.

3) Знайдіть за графіком значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = -3$; $y = 2$.

1015. Побудуйте графік функції $y = x + 2$, де $-4 \leq x \leq 3$, склавши таблицю для цілих значень аргументу.

1) Чи належить графіку функції точка $C(2; 5)$; точка $D(-2; 0)$?

2) Знайдіть за графіком значення функції для $x = -3$; $x = 1$.

3) Знайдіть за графіком значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = 1$; $y = 5$.

1016. Не виконуючи побудови графіка, знайдіть нулі функції:

1) $y = 5x$; 2) $y = 3x - 6$; 3) $y = -\frac{x}{10}$; 4) $y = \frac{5 - x}{8}$.

1017. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:

1) $y = -3x$; 2) $y = 12 - 4x$;

3) $y = \frac{x}{3}$; 4) $y = \frac{x + 2}{4}$.

1018. За графіком, який зображено на малюнку 23.5, знайдіть:

1) якою була температура повітря о 3 год; о 5 год; о 7 год; о 21 год;

2) о котрій годині температура повітря була -5°C ; 0°C ; 5°C .

3 **1019.** За графіком, який зображено на малюнку 23.5, знайдіть:

1) якою була температура повітря в 0 год; о 2 год; о 9 год; о 12 год; о 18 год;

2) о котрій годині температура повітря дорівнювала -6°C ; -2°C ; 1°C ; 3°C ;

3) якою була найнижча температура й о котрій годині;

4) якою була найвища температура й о котрій годині;

5) протягом якого часу температура підвищувалась;

6) протягом якого часу температура знижувалась;

7) протягом якого часу температура повітря була нижчою від 0°C ;

8) протягом якого часу температура повітря була вищою від 0°C .

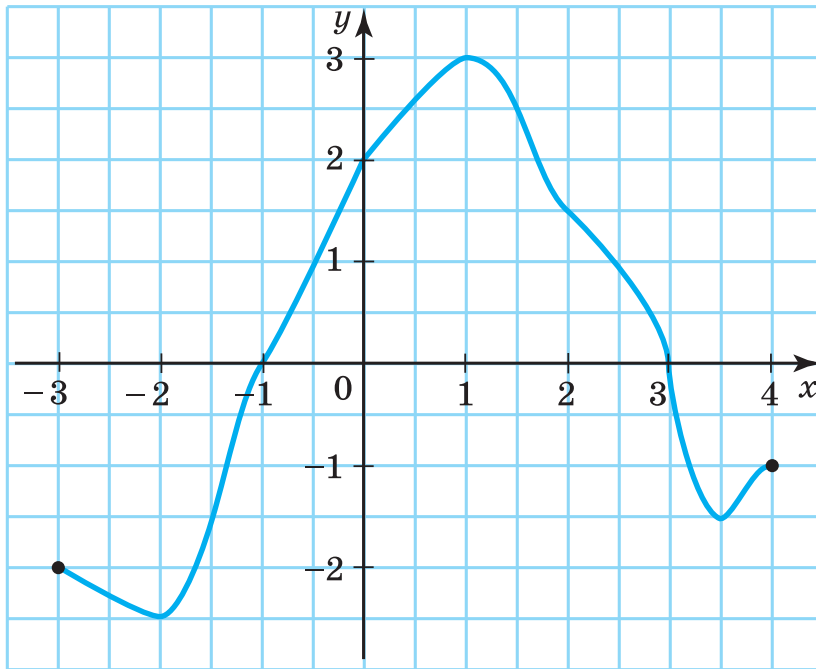
1020. За графіком, який зображено на малюнку 23.9, знайдіть:

1) значення y , якщо $x = -3$; -2 ; $-0,5$; $1,5$; 4 ;

2) значення x , яким відповідає $y = -2,5$; $-1,5$; 1 ;

3) нулі функції;

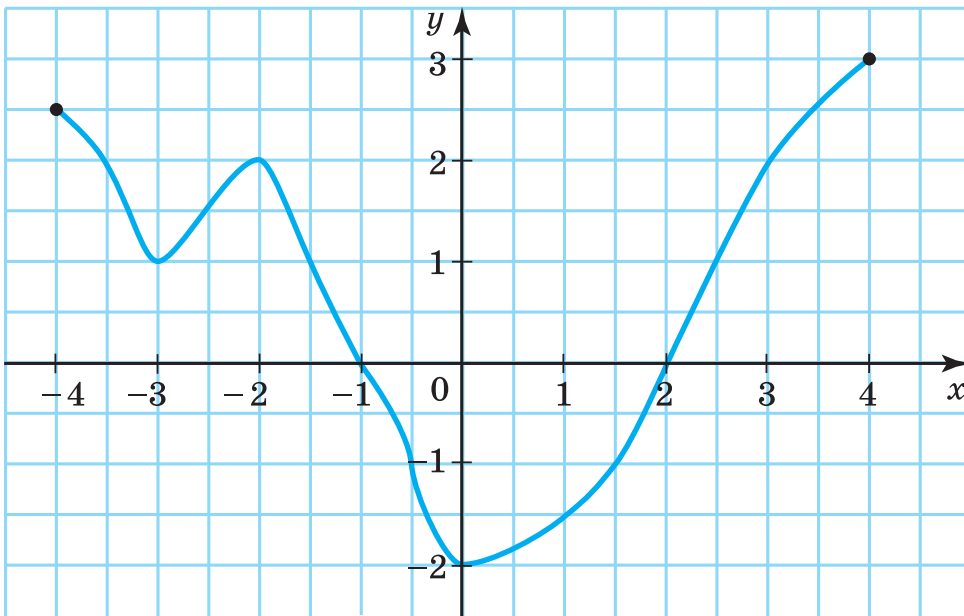
4) значення аргументу, за яких функція набуває додатних значень;



Мал. 23.9

5) значення аргументу, за яких функція набуває від'ємних значень.

1021. За графіком функції (мал. 23.10) знайдіть:



Мал. 23.10

- 1) значення y , якщо $x = -3,5; -2; -1,5; 0; 1; 2,5$;
- 2) значення x , яким відповідає $y = -1; 1; 2; 3$;
- 3) нулі функції;
- 4) значення аргументу, за яких функція набуває від'ємних значень;
- 5) значення аргументу, за яких функція набуває додатних значень.

1022. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, чи належить графіку функції $y = x^2 - 3x$ точка:

- 1) $(1; -2)$; 2) $(-2; -2)$;
- 3) $(0; -3)$; 4) $(-1; 4)$.

1023. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 2x + x^2$, з'ясуйте, чи належить йому точка:

- 1) $(1; 3)$; 2) $(-1; 3)$; 3) $(0; 0)$; 4) $(-2; 4)$.

1024. Ламана ABC – графік деякої функції, причому $A(-3; 2)$, $B(1; 6)$, $C(4; 0)$. Побудуйте цей графік і за графіком знайдіть:

- 1) значення функції, які відповідають значенням $x = -2; 0; 1$;
- 2) значення аргументу, яким відповідає значення $y = 2; 4; 6$.

1025. Ламана MNL є графіком деякої функції, причому $M(-2; -1)$, $N(2; 3)$, $L(6; -1)$. Побудуйте графік цієї функції і за графіком знайдіть:

- 1) значення функції, які відповідають значенням $x = -2; 0; 2; 5$;
- 2) значення аргументу, яким відповідають значення $y = -1; 1; 3$.

1026. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:

- 1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = 16 - x^2$; 3) $y = 2x^2 + 10x$.

1027. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:

1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^2 - 25$; 3) $y = 12x - 3x^2$.

1028. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{8 - x}{2}$, де $-2 \leq x \leq 10$;

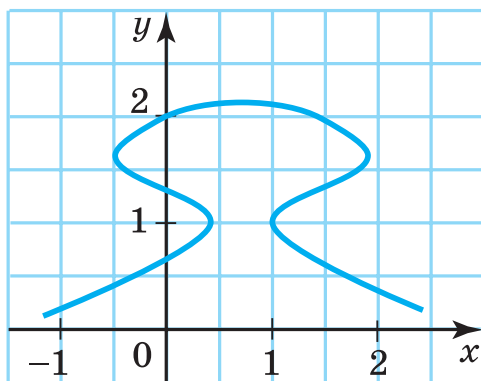
2) $y = x(4 + x)$, де $-5 \leq x \leq 1$.

1029. Побудуйте графік функції:

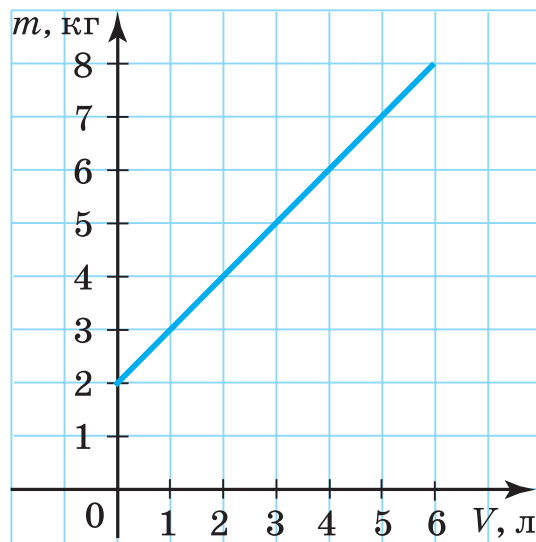
1) $y = \frac{x + 3}{2}$, де $-5 \leq x \leq 7$;

2) $y = x(4 - x)$, де $-1 \leq x \leq 5$.

1030. Чи є фігура на малюнку 23.11 графіком деякої функції?



Мал. 23.11



Мал. 23.12

4 **1031.** На малюнку 23.12 зображено графік залежності маси m (у кг) відра з водою від об'єму V (у л) води в ньому. Знайдіть за графіком:

1) масу порожнього відра;

2) масу відра, у якому 4 л води;

3) масу 1 л води;

4) об'єм води у відрі, якщо маса відра з водою – 8 кг.

Вправи для повторення

1032. Спростіть вираз:

1) $(a - 5)(a + 5) - a(a + 7)$;

2) $m(m - 4) + (9 - m)(m + 9)$;

3) $2a(a - b) - (a - b)^2$;

4) $(q + 5p)(5p - q) - (p - 5q)^2 - 10pq$.

1033. Доведіть, що різниця між будь-яким трицифровим натуральним числом і сумою його цифр кратна числу 9.

Життєва математика

1034. 1) Використання проточної води для миття посуду чи прання білизни призводить до марних витрат води в середньому до 15 л за хвилину. Скільки води можна зберегти під час півгодинного прання, якщо правильно ставитися до споживання води?

2) *Практична діяльність.* З'ясуйте, який тариф на воду (ціна за 1 м³ води) у вашій місцевості, та обчисліть, скільки коштів за годину можна заощадити, якщо правильно ставитися до споживання води.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

1035. Доведіть, що якщо n – натуральне число ($n > 1$), то число $4^n - 3$ не може бути квадратом натурального числа.

§ 24. Лінійна функція, її графік та властивості

Поняття про лінійну функцію

Приклад 1. Нехай маса одного цвяха 4 г, а маса порожнього ящика – 600 г. Тоді залежність між масою m (у г) ящика із цвяхами та кількістю x цвяхів у ньому (x – натуральне число) можна задати формулою $m = 4x + 600$.

Приклад 2. Нехай щомісячна зарплата продавчині складається з окладу в розмірі 1500 грн та премії в розмірі 1 % від вартості реалізованого товару. Тоді залежність між зарплатою y (y грн) і вартістю x (x грн) реалізованого товару можна задати формулою $y = 0,01x + 1500$, де $x > 0$.

В обох цих прикладах функції задано формулами вигляду $y = kx + l$, де k і l – деякі числа.

Лінійною називають функцію вигляду $y = kx + l$, де x – незалежна змінна, k і l – деякі числа.

Числа k і l називають **коефіцієнтами лінійної функції**.

Графік лінійної функції

З'ясуємо, який вигляд має графік лінійної функції.

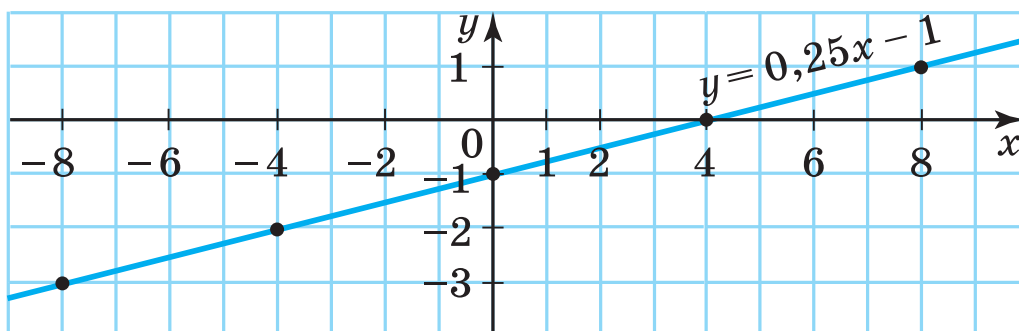
У формулі $y = kx + l$ незалежній змінній x можна надавати будь-яких значень, тому областю визначення лінійної функції є всі числа. Отже, для побудови графіка лінійної функції можна вибрати будь-які значення x , найкраще ті, що будуть зручними для обчислення значень y .

Приклад 3. Побудувати графік функції $y = 0,25x - 1$.

Розв'язання. Функція є лінійною. Складемо для неї таблицю кількох значень незалежної змінної x та відповідних їй значень функції y :

x	-8	-4	0	4	8
y	-3	-2	-1	0	1

Позначимо на координатній площині точки, координати яких отримано в таблиці. За допомогою лінійки легко впевнитися, що всі позначені точки лежать на одній прямій. Ця пряма є графіком лінійної функції $y = 0,25x - 1$ (мал. 24.1).



Мал. 24.1

Графіком будь-якої лінійної функції є **пряма**.

Оскільки пряма однозначно задається двома своїми точками, то для побудови прямої, що є графіком лінійної функції, достатньо знайти координати двох точок графіка, позначити їх на координатній площині і провести через них пряму.

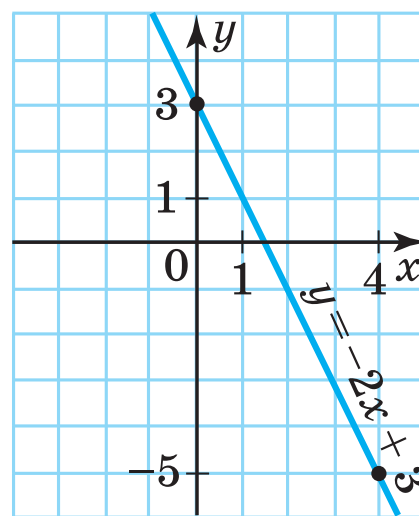
Приклад 4. Побудувати графік функції $y = -2x + 3$.

Розв'язання. Складемо таблицю для двох довільних значень аргументу. Отримані точки позначимо на координатній площині та проведемо через них пряму.

Графік функції $y = -2x + 3$ зображено на малюнку 24.2.

x	0	4
y	3	-5

Якщо коефіцієнти лінійної функції є дробами, то для знаходження двох точок її графіка доцільно добирати такі цілі значення аргументу, щоб отримувати цілі значення функції. Наприклад, значення функції $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ будуть цілими для $x = -1$ та $x = 5$, і для побудови графіка отримуємо точки $(-1; -1)$ та $(5; 1)$.



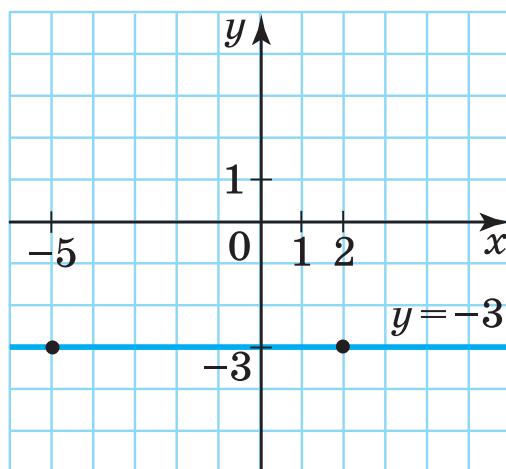
Мал. 24.2

Функція виду $y = l$

Якщо $k = 0$, формула $y = kx + l$ матиме вигляд $y = 0x + l$, тобто $y = l$. Лінійна функція вигляду $y = l$ набуває одних і тих самих значень для будь-яких значень x .

Приклад 5. Побудувати графік функції $y = -3$.

Розв'язання. Будь-якому значенню x відповідає одне й те саме значення y , що дорівнює -3 . Графіком функції є пряма, яка проходить через точки вигляду $(x; -3)$, де x – будь-яке число. Виберемо будь-які дві з них, наприклад $(-5; -3)$ і $(2; -3)$, та проведемо через них пряму (мал. 24.3). Ця пряма і є графіком функції $y = -3$. Вона паралельна осі x .



Мал. 24.3

Пряма вигляду $y = l$ паралельна осі x .

! Щоб побудувати графік функції $y = l$, достатньо позначити на осі y точку з координатами $(0; l)$ та провести через неї пряму, паралельну осі x .

Пряма пропорційність

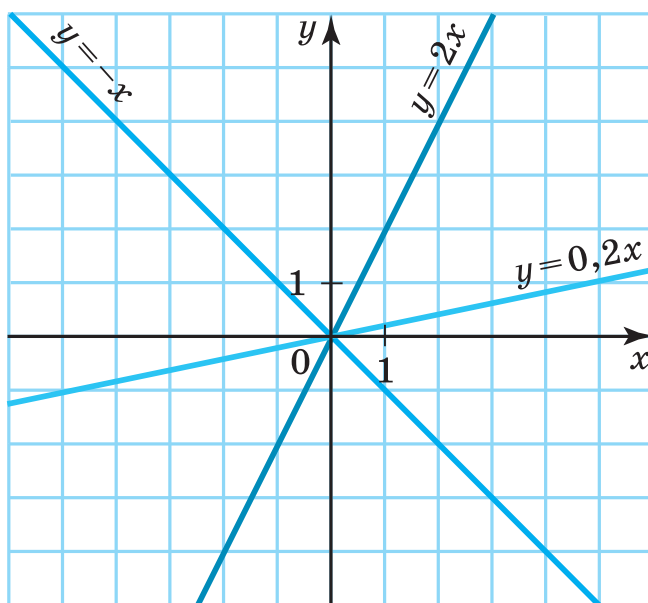
Для $l = 0$, $k \neq 0$, формула $y = kx + l$ набуває вигляду $y = kx$.

Функцію вигляду $y = kx$, де x – незалежна змінна, k – відмінне від нуля число, називають **прямою пропорційністю**.

Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції і $y = 0$ для $x = 0$, то

графіком прямої пропорційності є пряма, що проходить через початок координат.

На малюнку 24.4 зображено графіки прямих пропорційностей $y = -x$; $y = 2x$ та $y = 0,2x$.



Мал. 24.4

Властивості лінійної функції

Узагальнимо властивості лінійної функції $y = kx + l$.

1. Область визначення функції складається з усіх чисел.
2. Область значень функції для $k \neq 0$ складається з усіх чисел;
для $k = 0$ – лише з одного значення – числа l .
3. Графіком функції є пряма.

Перетин графіка функції з осями координат

Однією з важливих властивостей функції є існування *точок перетину її графіка з осями координат*.

Якщо на координатній площині графік функції вже зображено, то такі точки можна знайти безпосередньо з малюнка. Наприклад, на малюнку 24.1 точкою перетину графіка функції $y = 0,25x - 1$ з віссю абсцис є точка $(4; 0)$, а з віссю ординат – точка $(0; -1)$. У такому разі кажуть, що точки перетину знайдено графічно.

Але графічний спосіб не завжди дає змогу знайти точні координати цих точок. Приміром, на малюнку 24.2 визначити абсцису точки перетину графіка функції $y = -2x + 3$ з віссю абсцис можна лише наближено, наприклад, так: $x \approx 1,5$.

Отже, за допомогою графіка функції знайти точні значення абсциси точки перетину з віссю абсцис або ординати точки перетину з віссю ординат не завжди можливо.

Для багатьох функцій знайти координати точок перетину графіка з осями координат можна й не виконуючи побудови графіка, зокрема, якщо функцію задано формулою. У такому разі кажуть, що координати точок перетину знайдено аналітично, причому знайдені значення будуть точними, а не наближеними.

Приклад 6. Не виконуючи побудови, знайти координати точок перетину графіка функції $y = 2x - 6$ з осями координат.

Розв'язання. Точка перетину графіка з віссю абсцис належить цій осі, отже, її ордината має дорівнювати нулю. Тому для пошуку точки (або точок) перетину графіка функції з віссю абсцис достатньо у формулу, якою задано функцію, підставити значення $y = 0$ і розв'язати одержане рівняння.

Підставимо 0 замість y в рівняння $y = 2x - 6$. Одержимо рівняння $2x - 6 = 0$. Звідки $x = 3$. Отже, $(3; 0)$ – точка перетину графіка функції з віссю абсцис.

Точка перетину графіка з віссю ординат належить цій осі, отже, абсциса такої точки має дорівнювати нулю. Тому для знаходження точки перетину графіка функції з віссю ординат достатньо у формулу, якою задано функцію, підставити значення $x = 0$ та виконати обчислення.

Підставимо 0 замість x в рівняння $y = 2x - 6$. Одержимо: $y = 2 \cdot 0 - 6 = -6$. Отже, $(0; -6)$ – точка перетину графіка функції $y = 2x - 6$ з віссю ординат.

Відповідь: $(3; 0); (0; -6)$.

Зауважимо, що існують функції, графіки яких не перетинають осі координат або хоча б одну з них.

- ? Яку функцію називають лінійною? ● Що є графіком лінійної функції? Як його побудувати? ● Які властивості має лінійна функція? ● Як знайти координати точок перетину графіка функції з осями координат? ● Як побудувати графік функції $y = l$, де l – число? ● Яку функцію називають прямою пропорційністю?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **1036.** (Усно.) Чи є лінійною функція:

- 1) $y = 2x - 3$; 2) $y = 4x - x^2$; 3) $y = 3$;
4) $y = \frac{4}{x}$; 5) $y = \frac{x}{3} - 1$; 6) $y = x - 1 - x^6$?

1037. Які з даних функцій є лінійними:

- 1) $y = 2x^2 - 7$; 2) $y = 3x - 1$; 3) $y = \frac{10}{x}$;
4) $y = \frac{x}{2} + 3$; 5) $y = -4$; 6) $y = 7x - x^3$?

1038. (Усно.) Які з функцій задають пряму пропорційність:

1) $y = 2x$; 2) $y = \frac{2}{x}$; 3) $y = x + 2$;

4) $y = 2$; 5) $y = -\frac{x}{2}$; 6) $y = \frac{x}{2}$?

1039. Чи є прямою пропорційністю функція, яку задано формулою:

1) $y = -3x$; 2) $y = -3x + 1$; 3) $y = -\frac{3}{x}$;

4) $y = -3$; 5) $y = \frac{x}{3}$; 6) $y = -\frac{x}{3}$?

1040. (Усно.) Назвіть коефіцієнти k і l для кожної з даних лінійних функцій:

1) $y = -0,8x + 7$; 2) $y = 6 - x$; 3) $y = \frac{x}{3}$;

4) $y = 2,4x$; 5) $y = -15$; 6) $y = 0$.

2 **1041.** Ширина прямокутника дорівнює x см, а його довжина на 3 см більша за ширину. Задайте формулою залежність:

1) периметра прямокутника від його ширини;

2) площі прямокутника від його ширини.

Яка із цих залежностей є лінійною функцією?

1042. Учениця купила щоденник за 15 грн і кілька зошитів по 4 грн. Задайте формулою залежність вартості покупки y (y гривнях) від кількості придбаних зошитів x . Чи є ця залежність лінійною функцією? Якою є область визначення цієї функції?

1043. Учень мав 30 грн. За ці кошти він придбав x олівців, по 1,5 грн кожен, після чого в нього залишилося y грн. Задайте формулою залежність y від x . Чи є ця залежність лінійною функцією?

1044. Лінійну функцію задано формулою $y = 0,5x + 3$. Знайдіть:

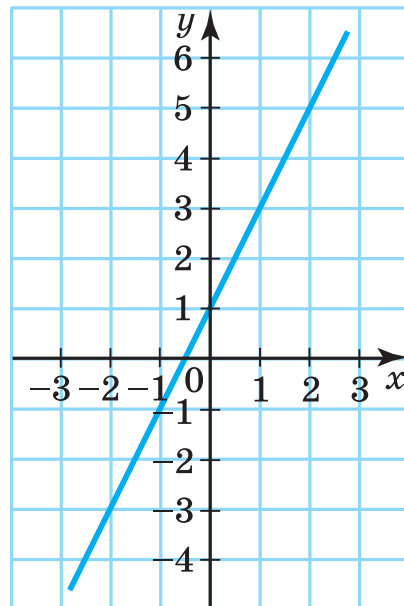
- 1) значення y , якщо $x = -12; 0; 18$;
- 2) значення x , для якого $y = -4; 8; 2,5$.

1045. Дано лінійну функцію $y = -2x + 3$. Знайдіть значення:

- 1) y , якщо $x = 1,5; -4; -6,5$;
- 2) x , для якого $y = 5; 0; -8$.

1046. Використовуючи графік функції на малюнку 24.5, заповніть у зошиті таблицю:

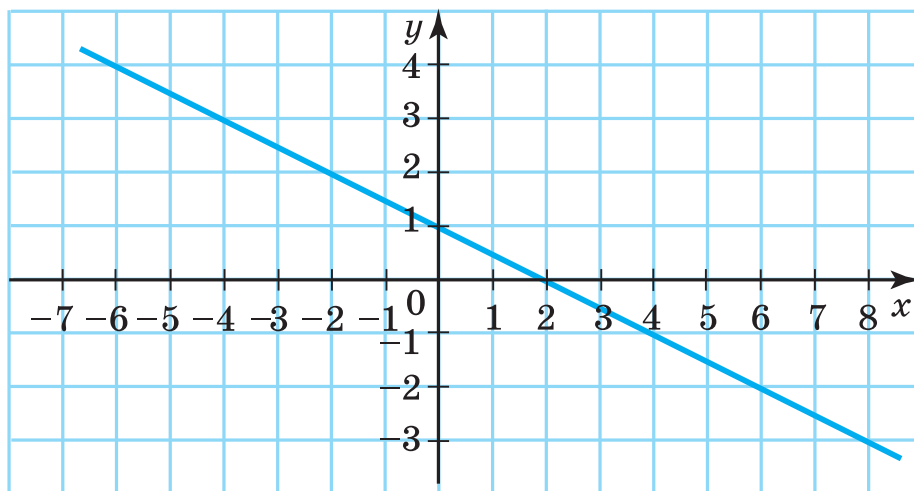
x	-2	0	1	3			
y					-5	-1	5



Мал. 24.5

1047. Використовуючи графік функції на малюнку 24.6, заповніть у зошиті таблицю:

x	-6	-2	2			
y				-3	-1	3



Мал. 24.6

1048. Запишіть координати будь-яких двох точок, що належать графіку функції $y = 5x - 2$.

1049. Заповніть у зошиті таблицю значень лінійної функції та побудуйте її графік:

1) $y = -x + 2$; 2) $y = 2x - 3$.

x	0	4
y		

x		
y		

1050. Заповніть у зошиті таблицю значень лінійної функції та побудуйте її графік:

1) $y = x - 3$; 2) $y = -3x + 1$.

x	0	3
y		

x		
y		

1051. Побудуйте графік лінійної функції:

1) $y = x + 2$; 2) $y = -3x + 4$; 3) $y = 0,5x - 3$;

4) $y = \frac{2}{3}x - 1$; 5) $y = -1$; 6) $y = -x + 2,5$.

1052. Побудуйте графік лінійної функції:

1) $y = x - 1$; 2) $y = -2x + 5$; 3) $y = -0,5x + 3$;

4) $y = \frac{3}{4}x + 1$; 5) $y = 4$; 6) $y = x - 1,5$.

1053. Мотоциклістка рухається зі швидкістю 65 км/год. Задайте формулою залежність відстані s (у кілометрах) від часу t (у годинах), за який вона подолає цю відстань. Чи є ця залежність прямою пропорційністю?

1054. Задайте формулою залежність:

1) довжини C кола від його радіуса r ;

2) площі S круга, обмеженого цим колом, від радіуса r .
Яка із цих залежностей є прямою пропорційністю?

1055. Запишіть формули будь-яких двох лінійних функцій, графіки яких проходять через точку $P(1; -5)$.

1056. Серед даних функцій знайдіть ті, графіки яких проходять через точку $(1; -4)$:

1) $y = 4x$; 2) $y = 2x - 2$; 3) $y = 1$;

4) $y = -4$; 5) $y = -4x$; 6) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

1057. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 1,8x - 7$, з'ясуйте, чи проходить цей графік через точку:

1) $A(0; 7)$; 2) $B(-5; -16)$; 3) $C(5; -2)$; 4) $D(10; 11)$.

1058. Не будуючи графік функції $y = -3x + 7$, з'ясуйте, чи належить йому точка:

1) $A(1; -4)$; 2) $B(0; 7)$; 3) $C(-1; 10)$; 4) $D(10; -37)$.

1059. Не виконуючи побудови, знайдіть нулі функції:

1) $y = 2x - 6$; 2) $y = -\frac{1}{2}x + 8$; 3) $y = 7x$; 4) $y = -5x$.

1060. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:

1) $y = 4x + 12$; 2) $y = -8x$.

1061. Побудуйте графік прямої пропорційності:

1) $y = x$; 2) $y = -2,5x$; 3) $y = -x$; 4) $y = \frac{1}{2}x$.

1062. Побудуйте графік прямої пропорційності:

1) $y = 1,5x$; 2) $y = -2x$.

3 **1063.** Побудуйте графік функції $y = 5 - 2,5x$. За графіком знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 0; 2;

2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює -5 ; 0; 10;

3) нулі функції;

- 4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;
- 5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень;
- 6) точки перетину графіка з осями координат.

1064. Побудуйте графік функції $y = 1,5x - 3$. За графіком знайдіть:

- 1) значення y , що відповідає значенню $x = -2; 0; 4$;
- 2) для якого значення x значення y дорівнює $-3; 0; 6$;
- 3) нулі функції;
- 4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;
- 5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень;
- 6) точки перетину графіка з осями координат.

1065. Графік функції $y = kx - 2$ проходить через точку $(6; -11)$. Знайдіть значення k .

1066. Знайдіть значення l , якщо графік функції $y = -\frac{1}{5}x + l$ проходить через точку $M(10; -5)$.

1067. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції з осями координат:

- 1) $y = 1,5x - 20$;
- 2) $y = 5 - \frac{x}{4}$.

1068. У яких точках перетинає осі координат графік функції:

- 1) $y = 0,2x - 40$;
- 2) $y = 18 - \frac{1}{3}x$?

1069. Точка $A(0,7; 70)$ належить графіку прямої пропорційності. Задайте цю функцію формулою.

1070. Задайте формулою прямою пропорційність, якщо її графік проходить через точку $B(-2; 18)$.

1071. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2}(6 - x)$;

2) $y = \frac{x - 5}{5}$.

1072. Побудуйте графіки функцій в одній системі координат та знайдіть координати точки їх перетину:

1) $y = -0,5x - 1$ і $y = x - 4$; 2) $y = -2$ і $y = 3x - 5$.

1073. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 1,5x - 4$ і $y = 2$ та знайдіть координати точки їх перетину.

1074. Усі точки графіка функції $y = kx + l$ мають одну й ту саму ординату, яка дорівнює 5. Знайдіть k і l .

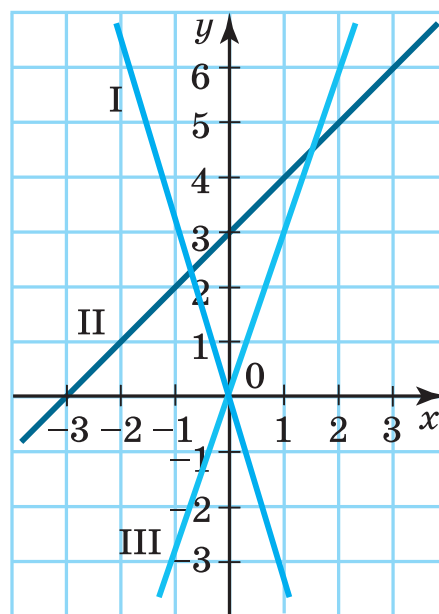
1075. Графік функції $y = kx + l$ паралельний осі абсцис і проходить через точку $M(0; -5)$. Знайдіть k і l .

4 **1076.** Установіть відповідність між функціями $y = 3x$, $y = -3x$ і $y = x + 3$ та їхніми графіками I–III, зображеними на малюнку 24.7.

1077. Функцію $y = 2x + 1$ задано для $-3 \leq x \leq 4$. Знайдіть область значень цієї функції.

1078. Не будуючи графіка функції $y = 4x - 6$, знайдіть таку його точку, у якої:

- 1) абсциса дорівнює ординаті;
- 2) абсциса й ордината – протилежні числа;
- 3) абсциса вдвічі менша від ординати.



Мал. 24.7

1079. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} x + 1, & \text{якщо } x \leq 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x < -2, \\ 3x + 2, & \text{якщо } x \geq -2. \end{cases}$$

1080. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 2 - 3x, & \text{якщо } x < 1, \\ 2x - 3, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

 **1081.** Побудуйте графік функції.

$$1) y = |x|;$$

$$2) y = |x| + x;$$

$$3) y = 4x - |x|;$$

$$4) y = |2x| + 3x + 1.$$

1082. Побудуйте графік функції.

$$1) y = -|x|;$$

$$2) y = |x| - x;$$

$$3) y = 2x + |x|;$$

$$4) y = |3x| - x - 1.$$

Вправи для повторення

1083. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (2x + 5)^2 - (2x - 3)^2 = 16;$$

$$2) (7x + 1)^2 - (49x - 2)(x - 1) = -66.$$

1084. Спростіть вираз:

$$1) (5m - 2)(5m + 2) - m(10m - 1) + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2;$$

$$2) (a + 4y)^2 - (a - 2y)(a + 2y) - y(4a - 5y).$$

1085. На столі лежить 73 зошити, а в коробці – 17 зошитів. Скільки зошитів потрібно перекласти зі стола в коробку, щоб у коробці їх стало вдвічі менше, ніж на столі?

1086. Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена, якщо це можливо:

1) $\frac{1}{9}p^2 + pq + 9p^2;$

2) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{15}xy + \frac{1}{25}y^2;$

3) $4x^2 - 20xy - 25y^2;$

4) $-36ab + 9a^2 + 36b^2.$



Життєва математика

1087. Вкладниця відкрила в банку «Щасливий» депозит на 20 000 грн. Через рік їй було нараховано 3200 грн відсоткових коштів.

1) Який відсоток річних нараховує банк?

2) Після сплати податку на доходи фізичних осіб вкладниця отримала відсоткові кошти в сумі 2624 грн. Скільки відсотків становить податок на доходи фізичних осіб?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

1088. *Давня аравійська задача.* В Аравії помер старий. Усе своє майно, 17 верблюдів, він заповів своїм синам, причому старший мав одержати половину, середній – третину, а найменший – дев'яту частину цього майна. Після смерті батька сини не змогли виконати заповіт, бо 17 не ділилося без остачі ані на 2, ані на 3, ані на 9. Довго сперечалися брати, аж тут на верблюді під'їхав до них мудрець. Довідався про суперечку і дав братам слушну пораду, яка й допомогла розділити майно відповідно до батькового заповіту. Що саме порадив мудрець?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Укажіть формулу, що задає функцію.

А. $x^2 + y^2 = xy$ **Б.** $y = \frac{4}{x - 3}$

В. $x^2 + x + y = zy$ **Г.** $y = \frac{x - 1}{y + 2}$

2. Яка з функцій є лінійною?

А. $y = x - 2$ **Б.** $y = \frac{1}{x - 2}$

В. $y = x^2 - 2$ **Г.** $y = x^3 - 2$

3. Укажіть функцію, що задає пряму пропорційність.

А. $y = x - 3$

Б. $y = \frac{2}{x}$

В. $y = 2x$

Г. $y = 2 + x$

2 4. Обчисліть значення функції $y = -\frac{20}{x}$, для значення аргументу, що дорівнює -4 .

А. 4 **Б.** -4

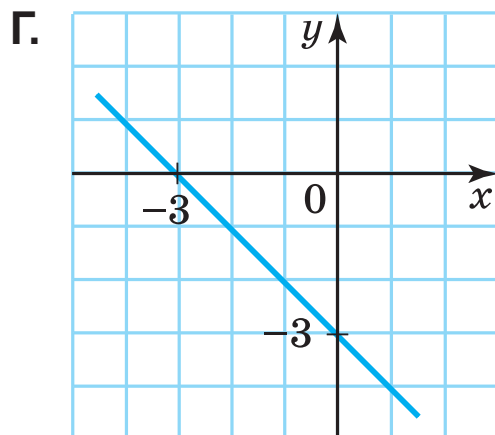
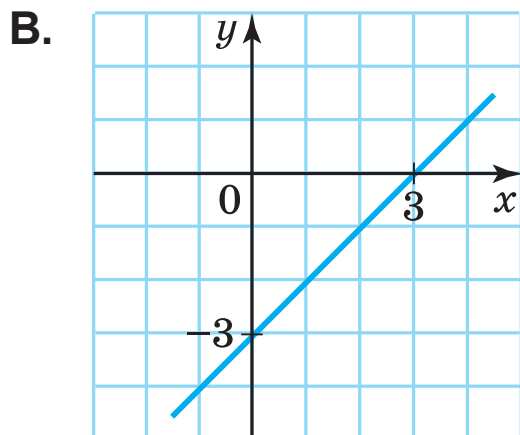
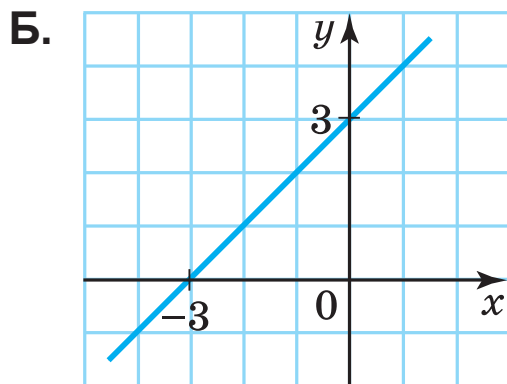
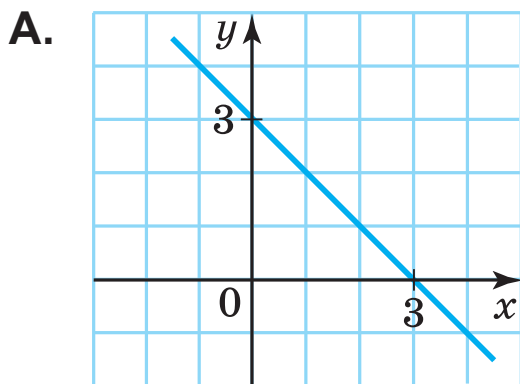
В. -5 **Г.** 5

5. Не виконуючи побудови, знайдіть нуль функції $y = \frac{1}{3}x - 2$.

А. 2 **Б.** 4

В. 6 **Г.** -6

6. На якому з малюнків зображено графік функції $y = 3 - x$?



3 7. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{3}{x^2 + x}$.

A. Усі числа

Б. Усі числа, крім 0

В. Усі числа, крім 0 і 1

Г. Усі числа, крім 0 і -1

8. Укажіть точку, що належить графіку функції $y = x^2 - 2x$.

A. (0; -2)

Б. (1; -1)

В. (-2; 0)

Г. (-1; -1)

9. Укажіть точку перетину графіка функції $y = 0,1x + 15$ з віссю абсцис.

A. (0; 15)

Б. (150; 0)

В. (-150; 0)

Г. Такої точки не існує

4 10. Знайдіть для $x = 2$ значення функції

$$y = \begin{cases} 7, & \text{якщо } x < 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 \leq x < 3, \\ 5x, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$$

A. 4 **Б.** 7 **В.** 10 **Г.** Неможливо знайти

11. Графік прямої пропорційності проходить через точку $P(2; -4)$. Укажіть точку, через яку також проходить цей графік.

A. (0; -2) **Б.** (3; 6)
В. (-3; -6) **Г.** (3; -6)

12. Не будуючи графіка функції $y = 3x - 8$, знайдіть таку його точку, абсциса й ордината якої є протилежними числами.

A. (-2; 2) **Б.** (2; -2)
В. (4; -4) **Г.** (-4; 4)

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 13. Установіть відповідність між функціями (1–3) та точками, у яких графік функції перетинає осі координат (А–Г).

Функція	Точки, у яких графік функції перетинає осі координат
1. $y = 4 - 2x$	A. (0; 4)
2. $y = 4$	Б. (0; 4), (4; 0)
3. $y = x - 4$	В. (0; 4), (2; 0)
	Г. (0; -4), (4; 0)

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 22-24

1 1. Які з даних формул задають функцію:

1) $y = x^2 + x$; 2) $y = \frac{x-1}{y+2}$;

3) $y = \frac{1}{x-8}$; 4) $xy = (x-y)^2$?

2. Чи є лінійною функція, яку задано формулою:

1) $y = 3x - 7$; 2) $y = x^2 - 5$; 3) $y = 4$; 4) $y = \frac{1}{2x-4}$?

3. Укажіть значення коефіцієнтів k і l для лінійної функції, заданої формулою:

1) $y = -2x + 6$; 2) $y = 7,4x$.

2 4. Функцію задано формулою $y = -2x + 7$. Знайдіть:

- 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 5;
- 2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює 3.

5. Побудуйте графік функції $y = 2x - 5$. За графіком знайдіть:

- 1) значення функції для $x = 4$;
- 2) значення аргументу, для якого $y = -3$.

6. Функцію задано формулою $y = 0,8x - 7,2$. Не виконуючи побудови:

- 1) знайдіть нулі функції;
- 2) з'ясуйте, чи проходить графік функції через точку (10; 1).

3 7. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{7}{x^2 - 5x}$.

8. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = -2,5x$ і $y = -5$ та знайдіть координати точки їх перетину.

4 9. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 6x + 11$.

Додаткові вправи

4 10. Функцію $y = 3x - 7$ задано для $-2 \leq x \leq 5$. Знайдіть область значень цієї функції.

11. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 2x + 6, & \text{якщо } x < 0, \\ 6 - x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$

За графіком знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) значення аргументу, за яких функція набуває додатних значень;
- 3) значення аргументу, за яких функція набуває від'ємних значень.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 3

До § 22

1 1089. Чи залежить площа квадрата від довжини його сторони? Чи є площа квадрата функцією від довжини сторони квадрата? Якщо так, то задайте цю функцію формулою за умови, що сторона квадрата дорівнює a .

2 1090. Функції задано формулами $y = \frac{x + 2}{x - 3}$ і $g = \frac{x - 4}{5}$.

Заповніть у зошиті таблицю, обчисливши відповідні значення функцій:

x	-4	-2	0	2	4
y					
g					

3 1091. Із села до міста, відстань між якими дорівнює 48 км, вирушив велосипедист зі швидкістю 14 км/год. Задайте формулою залежність змінної s від змінної t ,

де s – відстань, яку залишилося подолати велосипедисту до міста (y км), а t – час його руху (y год). За формулою знайдіть:

- 1) s , якщо $t = 1,5$;
- 2) t , якщо $s = 13$.

4 1092. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{12}{9x^2 - 17x};$$

$$2) y = \frac{x}{|x| - 1};$$

$$3) y = \frac{2}{|x| + 5};$$

$$4) y = \frac{9}{3 - |x - 1|};$$

$$5) y = \frac{15}{|2x - 3| - 5};$$

$$6) y = \frac{2}{1 - \frac{1}{x}}.$$

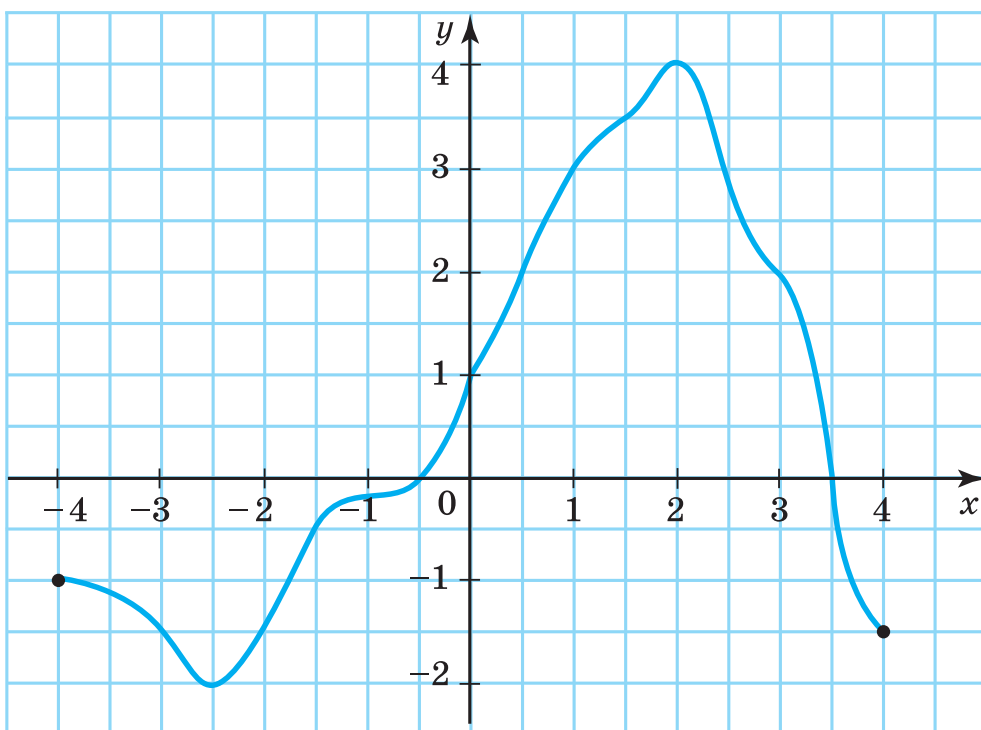
До § 23

2 1093. Функцію задано формулою $y = 2x - 3$, де $-2 \leq x \leq 3$. Заповніть у зошиті таблицю значень функції і побудуйте її графік.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y											

3 1094. На малюнку 1 зображено графік функції. За графіком знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -3; -1,5; 0; 1,5; 3$;
- 2) значення x , для яких $y = -1,5; 2; 3$;
- 3) область визначення функції;
- 4) область значень функції;
- 5) нулі функції;
- 6) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;



Мал. 1

7) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.

4

1095. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$, де $-2 \leq x \leq 4$;

2) $y = |x + 3|$, де $-5 \leq x \leq 3$.

До § 24

1

1096. Які з даних функцій є лінійними? Які з них є прямою пропорційністю:

1) $y = -3x$;

2) $y = -3x + 4$;

3) $y = -3x + 4x^2$;

4) $y = -3$;

5) $y = -\frac{3}{x}$;

6) $y = -\frac{1}{3}x$?

2

1097. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2x$;

2) $y = 1 - x$;

3) $y = 2$;

4) $y = 4x - 1$;

5) $y = -3x$;

6) $y = 0,5x + 2$.

3 **1098.** Побудуйте графік прямої пропорційності $y = -\frac{3}{4}x$. Знайдіть за графіком:

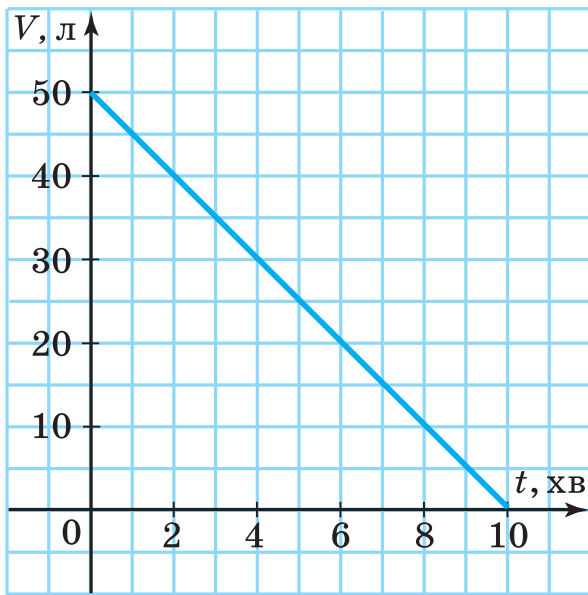
- 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -4 ; 0 ; 8 ;
- 2) значення аргументу, для якого значення функції дорівнює -6 ; 3 ; 6 ;
- 3) нулі функції;
- 4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;
- 5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.

1099. Графіки функцій $y = kx$ і $y = 2x + l$ перетинаються в точці $A(-2; 6)$. Знайдіть k і l .

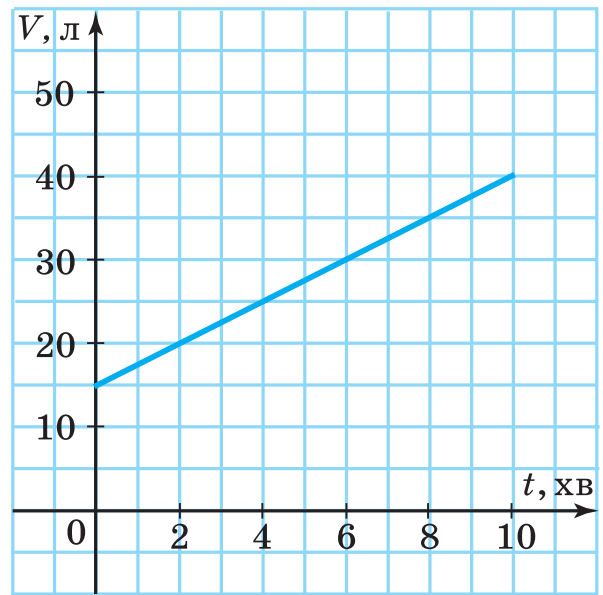
4 **1100.** На малюнках 2 і 3 зображено графіки двох процесів. Один з них описує процес наповнення резервуара водою, а другий – процес спорожнення резервуара від води. Який з графіків відповідає кожному зі згаданих процесів? По кожному з графіків знайдіть:

- 1) скільки літрів води було в резервуарі в початковий момент часу;
- 2) скільки літрів води буде в резервуарі через 1 хв; через 6 хв; через 8 хв від початку процесу;
- 3) через скільки хвилин від початку процесу в резервуарі буде 25 л води;
- 4) скільки літрів води надходить (випливає) щохвилини?

Здайте формулою залежність об'єму V води в резервуарі від часу t для кожного із цих двох процесів.



Мал. 2



Мал. 3



1101. Побудуйте графік функції.

1) $y = 2|x|$;

2) $y = 5|x| + x$;

3) $y = \frac{|x| - 3x}{2}$;

4) $y = |x| + |-2x|$.



Головне в розділі 3

ФУНКЦІЯ

Якщо кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, то таку залежність називають **функціональною залежністю**, або **функцією**.

ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють **область визначення функції**.

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ

Усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють **область значень функції**.

ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Графіком функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

Лінійною називають функцію вигляду $y = kx + l$, де x – незалежна змінна, k і l – деякі числа.

Графіком будь-якої лінійної функції є **пряма**.

Для побудови графіка лінійної функції достатньо знайти координати двох точок графіка.

Пряма вигляду $y = l$ паралельна осі x .

ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Щоб побудувати графік функції $y = l$, достатньо позначити на осі y точку з координатами $(0; l)$ та провести через неї пряму, паралельну осі x .

ПРЯМА ПРОПОРЦІЙНІСТЬ

Прямою пропорційністю називають функцію вигляду $y = kx$, де x – незалежна змінна, k – відмінне від нуля число.

Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат.

РОЗДІЛ 4

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **ознайомитесь** з лінійними рівняннями з двома змінними, системами двох лінійних рівнянь з двома змінними;
- **навчитесь** розв'язувати системи лінійних рівнянь з двома змінними, текстові задачі за допомогою систем лінійних рівнянь; будувати графіки лінійних рівнянь з двома змінними.

§ 25. Лінійне рівняння з двома змінними

Рівняння з двома змінними та його розв'язок

У попередніх параграфах ми розглядали рівняння з однією змінною. Проте в алгебрі розглядають і рівняння з кількома змінними. Зокрема, ми розглянемо рівняння з двома змінними.

Приклад 1. Сума одного числа з квадратом другого дорівнює 17. Якщо перше число позначити через x , а друге – через y , то співвідношення між ними можна записати у вигляді рівності $x + y^2 = 17$, яка містить дві змінні x і y . Такі рівності називають **рівняннями з двома змінними** (або **рівняннями з двома невідомими**).

Якщо $x = 1$; $y = 4$, то рівняння $x + y^2 = 17$ перетворюється на правильну числову рівність. У такому разі кажуть, що пара значень змінних $x = 1$; $y = 4$ є **розв'язком** рівняння $x + y^2 = 17$. Або скорочено: пара чисел $(1; 4)$ є розв'язком рівняння.

Розв'язком рівняння з двома змінними називають пару значень змінних, яка перетворює рівняння в правильну числову рівність.

Розв'язками рівняння $x + y^2 = 17$ також є пари $(-8; 5)$; $(8; 3)$; $(16; -1)$. Для такого скороченого запису розв'язків рівняння важливо знати, що пара чисел має бути *впорядкованою*.

Якщо рівняння містить змінні x і y ,

то на першому місці записують значення змінної x , а на другому – значення змінної y .

! Щоб знайти розв'язок рівняння з двома змінними, можна підставити в рівняння довільне значення однієї змінної і, розв'язавши отримане рівняння, знайти відповідне їй значення другої змінної.

Знайдемо так ще кілька розв'язків рівняння $x + y^2 = 17$. Нехай $y = -2$, тоді $x + (-2)^2 = 17$, звідки $x = 13$; нехай $y = 6$, тоді $x + 6^2 = 17$, звідки $x = -19$.

Маємо ще два розв'язки рівняння: $(13; -2)$ і $(-19; 6)$.

Лінійне рівняння з двома змінними

Лінійним рівнянням з двома змінними називають рівняння вигляду $ax + by = c$, де x і y – змінні. Числа a , b і c називають **коефіцієнтами** рівняння.

Рівняння з двома змінними, які мають одні й ті самі розв'язки, називають **рівносильними**. Рівняння, які не мають розв'язків, також є рівносильними.

Рівняння з двома змінними мають ті самі **властивості**, що й рівняння з однією змінною:

1) якщо в рівнянні розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

- 2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
- 3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Приклад 2. Розглянемо рівняння $7x + 3y + 2 = 5(y - 1)$. Якщо в ньому розкрити дужки, потім перенести доданки, що містять змінні, в одну частину рівняння, а ті, що їх не містять, – у другу, далі звести подібні доданки, отримаємо рівняння $7x - 2y = -7$, рівносильне рівнянню $7x + 3y + 2 = 5(y - 1)$.

Використовуючи властивості рівнянь з двома змінними, можна знаходити їхні розв'язки і в інший спосіб.

Приклад 3. Розглянемо рівняння $3x + 5y = 2$. Використовуючи властивості рівносильності рівнянь, *виразимо* в цьому рівнянні *одну змінну через іншу*. Наприклад, змінну y через змінну x . Для цього спочатку $3x$ перенесемо у праву частину рівняння: $5y = -3x + 2$, потім обидві частини поділимо на 5 і одержимо $y = -0,6x + 0,4$. Це рівняння рівносильне рівнянню $3x + 5y = 2$. Тепер, маючи формулу $y = -0,6x + 0,4$, можна знайти скільки завгодно розв'язків рівняння $3x + 5y = 2$. Для цього достатньо взяти довільне значення змінної x і обчислити відповідне йому значення змінної y . Пари таких значень змінних x і y запишемо в таблицю:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	3,4	2,8	2,2	1,6	1	0,4	-0,2	-0,8	-1,4	-2	-2,6

Пари чисел, записані у стовпчиках таблиці, є розв'язками рівняння $3x + 5y = 2$. Це рівняння має безліч розв'язків.

- ? Наведіть приклад рівняння з двома змінними. ○ Що називають розв'язком рівняння з двома змінними? ○ Сформулюйте означення лінійного рівняння з двома змінними. ○ Наведіть приклад лінійного рівняння з двома змінними. ○ Які рівняння з двома змінними називають рівносильними? ○ Які властивості мають рівняння з двома змінними?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

1102. (Усно.) Укажіть рівняння, що є рівняннями з двома змінними:

1) $x^2 - 3xy = 5$;

2) $4x^2 - 5x - 1 = 0$;

3) $3x + 2y = 5$;

4) $x + y + z = 8$;

5) $x + 2x^2 = y - 3y^2$;

6) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3$.

1103. (Усно.) Чи є лінійним рівняння з двома змінними:

1) $4x - 5y = 9$;

2) $3x^2 - 4y = 5$;

3) $2x + 11y = 0$;

4) $\frac{x+2}{y-1} = 7$;

5) $0x + 3y = 12$;

6) $13x + 2y^2 = 3$?

1104. Укажіть рівняння з двома змінними. Які з них є лінійними:

1) $3x - 2y = 5$;

2) $2x^2 - 3y^2 = 1$;

3) $(x-2)(y+1) = 5$;

4) $4x - 0y = 8$;

5) $xyz = 12$;

6) $\frac{1}{7}x + \frac{1}{8}y = \frac{1}{9}$?

1105. (Усно.) Чи є пара чисел розв'язком рівняння $x - y = 0$:

1) (4; 4);

2) (-1; 1);

3) (0; 0)?

1106. Чи є пара чисел $x = 2$; $y = 3$ розв'язком рівняння $x + y = 5$? Знайдіть ще три розв'язки цього рівняння.

1107. Які з пар чисел (10; 1), (1; 10), (7; 2), (7; -2), (9; 0) є розв'язками рівняння $x - y = 9$?

1108. Які з пар чисел (2; 1), (2; -1), (0; 5), (1; 3), (-1; 5) є розв'язками рівняння $2x + y = 5$?

- 2** **1109.** Розв'язком яких рівнянь є пара чисел $(-1; 3)$:
- 1) $2x - 17y = 53$; 2) $3x^2 + y^2 = 12$;
 3) $(x - 3)(y + 2) = -20$; 4) $0x + 4y = -12$;
 5) $0x + 0y = 0$; 6) $x^2 + 1 = y^2 - 7$?
- 1110.** Розв'язком яких рівнянь є пара чисел $x = 2$; $y = -1$:
- 1) $3x + y = 5$; 2) $x^2 + y^2 = 3$;
 3) $2x + 0y = 4$; 4) $x(y + 3) = 14$;
 5) $0x + 0y = 7$; 6) $\frac{1}{2}x + y = 0$?
- 1111.** Знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:
- 1) $x + y = -3$; 2) $x - 2y = 5$.
- 1112.** Знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:
- 1) $x - y = 2$; 2) $x + 3y = 0$.
- 1113.** Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $x = 3$; $y = -2$.
- 1114.** Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $(-2; 0)$.
- 1115.** Виразіть з рівняння $5x + y = 7$ змінну y через змінну x .
- 1116.** Виразіть з рівняння $x - 3y = 9$ змінну x через змінну y .
- 3** **1117.** З лінійного рівняння $3x - 2y = 12$ виразіть:
- 1) змінну y через змінну x ;
 2) змінну x через змінну y .
- 1118.** Виразивши в рівнянні змінну y через змінну x , знайдіть два будь-яких розв'язки рівняння:
- 1) $x + y = 29$; 2) $5x + y = 7$;
 3) $3x - 2y = 15$; 4) $6y - x = 5$.
- 1119.** Виразивши в рівнянні змінну y через змінну x або змінну x через змінну y , знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:
- 1) $x - 2y = -8$; 2) $7x - y = 9$;
 3) $3x + 2y = 6$; 4) $5x - 7y = 12$.

- 1120.** Пара чисел $(-5; p)$ є розв'язком рівняння $2x - y = -13$.
Знайдіть p .
- 1121.** Пара чисел $(n; -1)$ є розв'язком рівняння $3x + 5y = 4$.
Знайдіть n .
- 1122.** Знайдіть m , якщо пара чисел $(-1; -3)$ є розв'язком рівняння:
1) $8x + 9y = m$; 2) $mx - 2y = -9$.
- 1123.** Для якого значення d пара чисел $(2; -1)$ є розв'язком рівняння:
1) $7x - 5y = d$; 2) $3x + dy = 8$?
- 1124.** Знайдіть два деяких розв'язки рівняння
 $2(x - y) = 3(x + y) + 4$.
- 1125.** Серед розв'язків рівняння $x + 3y = 20$ знайдіть пару рівних між собою чисел.
- 1126.** Знайдіть p , якщо:
1) пара $(p; p)$ є розв'язком рівняння $4x - 9y = -10$;
2) пара $(p; -p)$ є розв'язком рівняння $17x + 12y = 105$.
- 4** **1127.** Знайдіть усі пари натуральних чисел, які є розв'язками рівняння:
1) $2x + y = -7$; 2) $3x + 2y = 5$;
3) $x + 7y = 15$; 4) $xy = 7$.

Вправи для повторення

- 1128.** Функцію задано формулою $y = \frac{2x + 1}{x - 6}$. Заповніть у зошиті таблицю, обчисливши відповідні значення функції:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y								

1129. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(x - 10)^2 - x(x + 80)$, якщо $x = -0,83$;

2) $(5m + 3)^2 - (5m - 3)^2$, якщо $m = -\frac{17}{60}$.

1130. Відомо, що $a + b = -1$, $ab = -6$. Знайдіть значення виразів:

1) $a^2b + ab^2$; 2) $a^2 + b^2$; 3) $(a - b)^2$; 4) $a^3 + b^3$.



Життєва математика

1131. Роздрібна ціна підручника для 7 класу становить 360 грн, що на 20 % вище за оптову ціну. Скільки коштів вартуватимуть 28 таких підручників, придбаних для 7 класу, за оптовою ціною?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1132. Побудуйте графік лінійної функції:

1) $y = x + 3$; 2) $y = -2x + 1$;

3) $y = 0,6x + 2$; 4) $y = -2$.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

1133. Дано два трицифрових числа, сума яких ділиться на 37. Ці числа записали в рядок одне за одним. Доведіть, що отримане в такий спосіб шестицифрове число також ділиться на 37.

§ 26. Графік лінійного рівняння з двома змінними

Графік рівняння з двома змінними

Кожну пару чисел, що є розв'язком рівняння з двома змінними x і y , можна позначити на координатній площині точкою, абсциса якої – значення x , а ордината – значення y . Усі такі точки утворюють *графік рівняння з двома змінними*.

Графіком рівняння з двома змінними x і y називають фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками цього рівняння.

**Графік рівняння $ax + by = c$,
у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b
відмінний від нуля**

З'ясуємо, як виглядає графік лінійного рівняння з двома змінними.

Приклад 1. Побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними $5x + 2y = 8$.

Розв'язання. Виразимо змінну y через змінну x , маємо:
 $2y = -5x + 8$. Отже, $y = -2,5x + 4$.

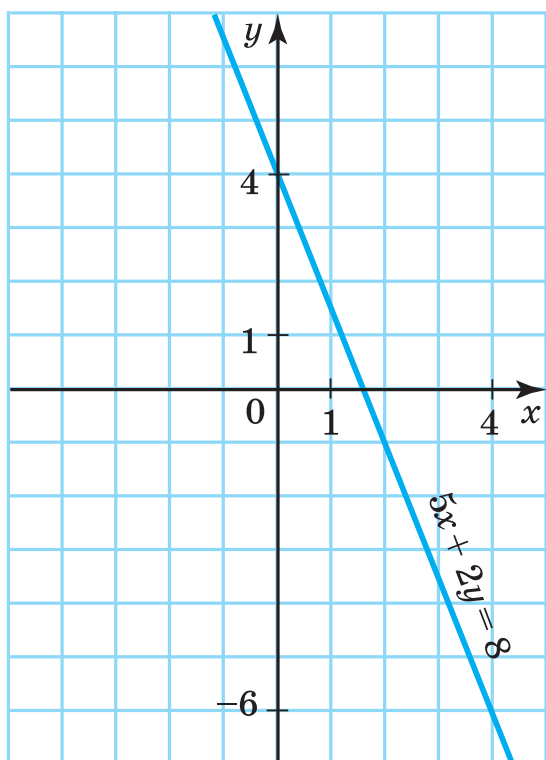
Формула $y = -2,5x + 4$ задає лінійну функцію, графіком якої є пряма. Для побудови графіка складемо таблицю значень x і y для двох його точок:

x	0	4
y	4	-6

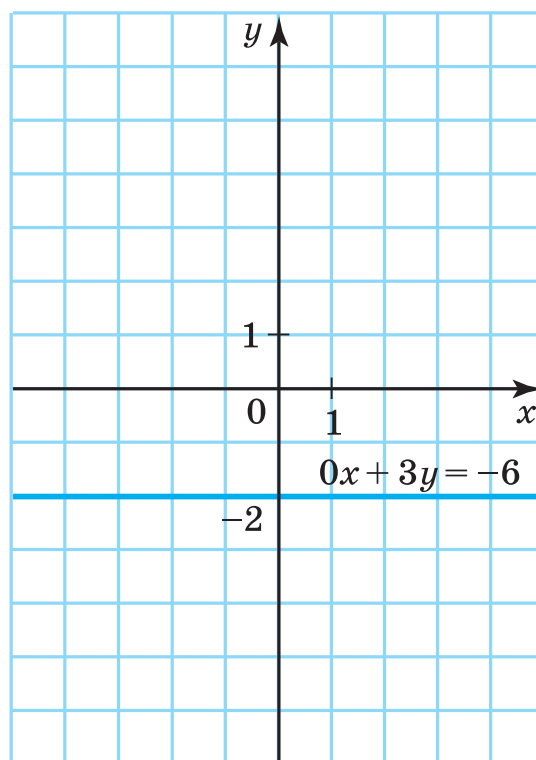
Графік функції $y = -2,5x + 4$ зображено на малюнку 26.1. Оскільки рівняння $5x + 2y = 8$ та $y = -2,5x + 4$ є рівносильними, то побудована пряма є також і графіком рівняння $5x + 2y = 8$.

Приклад 2. Побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними $0x + 3y = -6$.

Розв'язання. Рівняння $0x + 3y = -6$ рівносильне рівнянню $y = -2$. Це лінійна функція, графіком якої є пряма, паралельна осі x , що проходить через точку $(0; -2)$. Цю пряму зображено на малюнку 26.2. Вона також є графіком рівняння $0x + 3y = -6$.



Мал. 26.1



Мал. 26.2

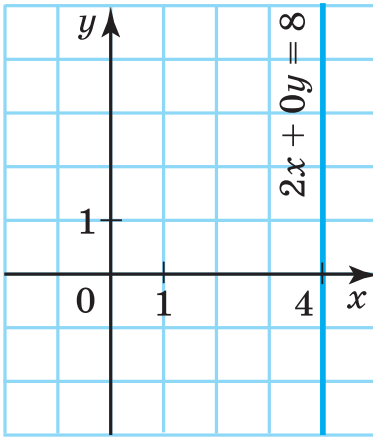
За допомогою аналогічних міркувань можна показати, що графіком будь-якого лінійного рівняння з двома змінними $ax + by = c$, де $b \neq 0$, є пряма.

Розглянемо випадок, коли $b = 0$.

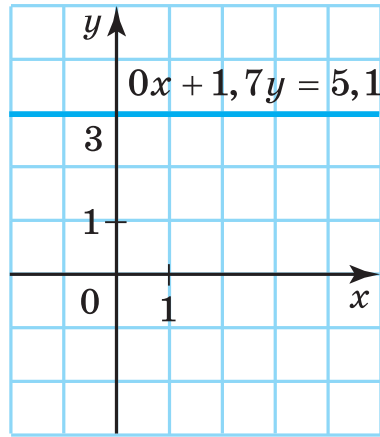
Приклад 3. Побудувати графік рівняння $2x + 0y = 8$.

Розв'язання. Розв'язком даного рівняння є кожна пара чисел вигляду $(4; y)$, де y – будь-яке число. Наприклад, $(4; -2)$, $(4; 0)$, $(4; 3)$, $(4; 7,5)$ – теж розв'язки даного рівняння. Графік рівняння складається з усіх точок, абсциси яких дорівнюють 4, а ординати – будь-які числа. Такі точки утворюють пряму, яка проходить через точку $(4; 0)$ паралельно осі y . Цю пряму зображено на малюнку 26.3.

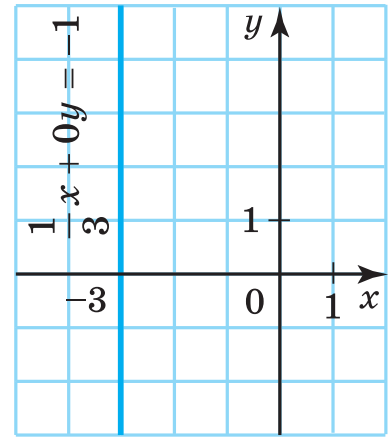
Графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля, є пряма.



Мал. 26.3



Мал. 26.4



Мал. 26.5

Приклад 4. На малюнку 26.4 зображено графік рівняння $0x + 1,7y = 5,1$, тобто це графік рівняння $y = 3$, а на малюнку 26.5 – графік рівняння $\frac{1}{3}x + 0y = -1$, тобто $x = -3$.

- 1) Щоб побудувати графік рівняння $y = m$, достатньо позначити на осі y точку $(0; m)$ та провести через неї пряму паралельно осі x .
- 2) Щоб побудувати графік рівняння $x = n$, достатньо позначити на осі x точку $(n; 0)$ та провести через неї пряму паралельно осі y .

Графік рівняння $0x + 0y = c$

Розглянемо випадок, коли в лінійному рівнянні $ax + by = c$ обидва коефіцієнти a і b дорівнюють нулю.

Приклад 5. Нехай $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Тоді маємо рівняння $0x + 0y = c$, наприклад $0x + 0y = 2$. Це рівняння не має розв'язків, отже, його графік не містить жодної точки, а тому не існує.

Приклад 6. Нехай $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Тоді маємо рівняння $0x + 0y = 0$. Будь-яка пара чисел є розв'язком цього рівняння, а його графіком – усі точки координатної площини.

? Що називають графіком рівняння з двома змінними x і y ? • Яка фігура є графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля? • Як побудувати графік рівняння $y = m$, де m – число; графік рівняння $x = n$, де n – число?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** **1134.** (Усно.) Чи належить графіку рівняння $x + y = 6$ точка:
- 1) (5; 1); 2) (4; -2);
3) (1; 6); 4) (6; 0)?
- 1135.** Які з точок $A(4; 0)$, $B(1; 3)$, $C(3; -1)$, $D(0; 4)$, $E(5; 1)$ належать графіку рівняння $x - y = 4$?
- 2** **1136.** Чи проходить графік рівняння $7x + 5y = 25$ через точку:
- 1) (7; -4); 2) (5; -2);
3) (-1,4; 7); 4) (35; -44)?
- 1137.** Графіки яких рівнянь проходять через точку $P(-2; 3)$:
- 1) $7x + 9y = 15$; 2) $17y - 4x = 59$;
3) $0x + 5y = 15$; 4) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = -1$;
5) $0x + 0y = 5$; 6) $1,7x + 1,2y = 0,2$?
- 1138.** Доведіть, що графіки рівнянь $5x - 8y = -66$, $0x + 3y = 21$ та $7y - 4x = 57$ проходять через точку $M(-2; 7)$.
- 1139.** Назвіть дві довільні точки, які належать графіку рівняння $2x - 5y = 20$.
- 1140.** Знайдіть дві точки, які належать графіку рівняння $3x + 2y = 12$, і дві точки, які йому не належать.
- 1141.** Побудуйте графік рівняння:
- 1) $x - y = 5$; 2) $0,5x + y = 3$;
3) $x + 3y = 0$; 4) $0,2x - 0,4y = 2$.

1142. Побудуйте графік рівняння:

1) $x + y = 6$;

2) $y - 2x = 0$;

3) $x - 0,5y = 4$;

4) $2x + 3y = 5$.

1143. Запишіть яке-небудь лінійне рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точку $P(1; -3)$.

3 **1144.** На графіку рівняння $2x + 3y = 7$ вибрано точку з абсцисою -4 . Знайдіть ординату цієї точки.

1145. На графіку рівняння $5x - 7y = 16$ взято точку з ординатою -2 . Яка абсциса в цієї точки?

1146. Побудуйте графік рівняння:

1) $0x + 2,5y = 12,5$;

2) $7x + 0y = -14$;

3) $1,9x = 5,7$;

4) $3y = -7,5$.

1147. Побудуйте графік рівняння:

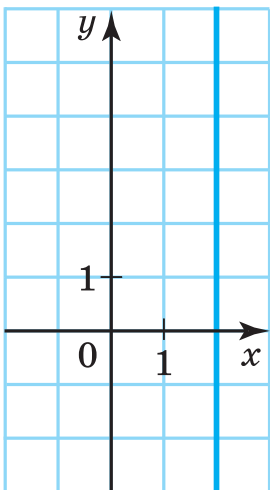
1) $3x + 0y = -12$;

2) $0x - 1,2y = 3,6$;

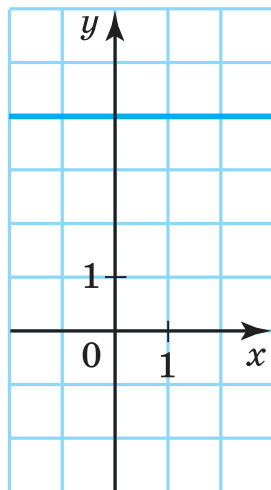
3) $1,8y = 7,2$;

4) $4x = 6$.

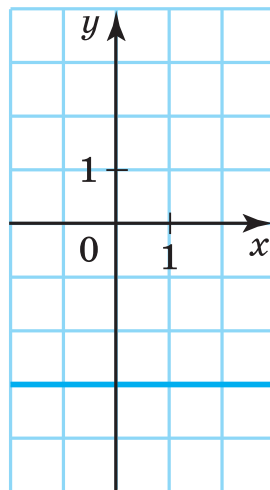
1148. Запишіть рівняння, графіки яких зображено на малюнках 26.6–26.9.



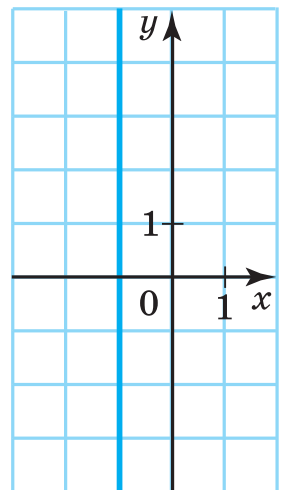
Мал. 26.6



Мал. 26.7



Мал. 26.8



Мал. 26.9

1149. За якого значення t графік рівняння:

1) $5x + 7y = t$ проходить через початок координат;

1158. Подайте у вигляді многочлена вираз:

- 1) $64a^2 - (8a - 1)^2 + 14a$;
- 2) $m^2 + 4n^2 - (m + 2n)^2 - 12mn$;
- 3) $2m(m - 5) - (m - 5)^2$;
- 4) $(x - 3)(x + 5) - (x + 1)^2$.

1159. Автомобіль та автобус одночасно виїхали назустріч один одному з пунктів A і B , відстань між якими 240 км. Швидкість автомобіля на 20 км/год більша за швидкість автобуса. Знайдіть швидкість автобуса та швидкість автомобіля, якщо вони зустрілися через 2 год після виїзду, при цьому автомобіль зробив на шляху півгодинну зупинку.



Життєва математика

1160. Маса новонародженої дитини в середньому має становити 3 кг 300 г. Якщо батько дитини є курцем, то її маса буде на 125 г меншою від середньої, якщо ж курить мати – меншою на 300 г. Визначте, скільки відсотків маси втрачає дитина при народженні, якщо:

- 1) курить її батько;
- 2) курить її мати.

Відповідь округліть до цілих відсотків.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1161. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 0,5x + 2$ і $y = 5 - x$. За графіком знайдіть координати точки їх перетину.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

1162. Доведіть, що для будь-якого значення x значення виразу $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ є числом додатним.

§ 27. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними та її розв'язок. Розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними графічно

Поняття про систему рівнянь з двома змінними та її розв'язок

Приклад 1. За набір фарб і набір пензлів разом заплатили 96 грн, причому набір фарб був на 16 грн дорожчий за набір пензлів. Скільки коштує набір фарб і скільки – набір пензлів? *Розв'язання.* Цю задачу можна розв'язати арифметичним способом (по діях) або за допомогою рівняння з однією змінною. А ще її можна розв'язати за допомогою лінійних рівнянь з двома змінними.

Якщо вартість набору фарб позначити через x грн, а набору пензлів – через y грн, то, враховуючи, що вони разом коштують 96 грн, отримаємо рівняння: $x + y = 96$.

Оскільки набір фарб дорожчий за набір пензлів на 16 грн, то маємо ще одне рівняння: $x - y = 16$.

Отримали два рівняння з двома змінними, які є математичною моделлю задачі.

Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти такі значення змінних x і y , які б одночасно перетворювали у правильну рівність кожне з отриманих рівнянь, тобто знайти спільний розв'язок цих рівнянь.

Якщо є кілька рівнянь, для яких потрібно знайти спільний розв'язок, то кажуть, що ці рівняння утворюють **систему рівнянь**. Записують систему рівнянь за допомогою фігурної дужки. Складену за умовою даної задачі **систему лінійних рівнянь з двома змінними** записують так:

$$\begin{cases} x + y = 96, \\ x - y = 16. \end{cases}$$

Розв'язком кожного з рівнянь системи є пара значень змінних $x = 56$, $y = 40$. Її називають *розв'язком системи рівнянь*.

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, яка є розв'язком кожного з рівнянь системи.

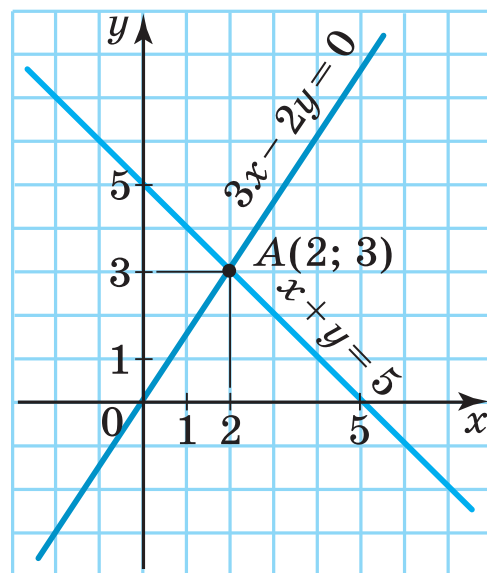
Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Графічний спосіб розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними

Для розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними можна використовувати графіки рівнянь. Такий спосіб розв'язування систем рівнянь називають **графічним**. Розглянемо його на прикладі.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо в одній координатній площині графіки обох рівнянь (мал. 27.1). Координати кожної точки прямої, що є графіком рівняння $x + y = 5$, є розв'язками першого рівняння системи. Аналогічно координати кожної точки прямої $3x - 2y = 0$ є розв'язками другого рівняння системи. Координати точки перетину цих прямих є розв'язками і першого, і другого рівняння, тобто є розв'язком кожного з рівнянь, отже, і розв'язком даної системи рівнянь.



Мал. 27.1

Оскільки графіки перетинаються лише в точці $(2; 3)$, то система має єдиний розв'язок $x = 2; y = 3$. Перевіркою (підстановкою в кожне з рівнянь системи) впевнюємося, що ця пара чисел дійсно є розв'язком цієї системи. Цей розв'язок можна записати ще так: $(2; 3)$, де на першому місці – значення змінної x , а на другому – значення змінної y .

Відповідь: $(2; 3)$.

Зауважимо, що графічний спосіб зазвичай дає змогу знаходити розв'язки лише наближено. У прикладі 2 перевіркою ми переконалися, що пара $(2; 3)$ є точним розв'язком.

Розглянемо системи двох лінійних рівнянь з двома змінними, у кожному з яких хоча б один з коефіцієнтів при змінних x і y відмінний від нуля. Графіками обох рівнянь системи є прямі. Тому якщо ці прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок, якщо прямі не перетинаються (паралельні), то система не має розв'язків, якщо прямі збігаються, то система має безліч розв'язків.

Отже,

щоб розв'язати систему рівнянь графічно, доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) побудувати графіки рівнянь системи в одній координатній площині;**
- 2) знайти координати точки перетину графіків або впевнитися, що вони не перетинаються (є паралельними) або збігаються;**
- 3) якщо координати точки перетину є цілими числами, то виконати перевірку; якщо – ні, то розв'язок системи визначити наближено;**
- 4) записати розв'язок у відповідь.**

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 6x + 4y = 24. \end{cases}$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Побудуємо графіки рівнянь в одній координатній площині (мал. 27.2). Графіки рівнянь є паралельними прямими, отже, не мають спільної точки, тому система розв'язків не має.

Оскільки малюнок не дає потрібної точності, пересвідчитися, що система не має розв'язків, можна й інакше.

2-й спосіб. Поділивши обидві частини другого рівняння на 2, ма-

тимемо:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

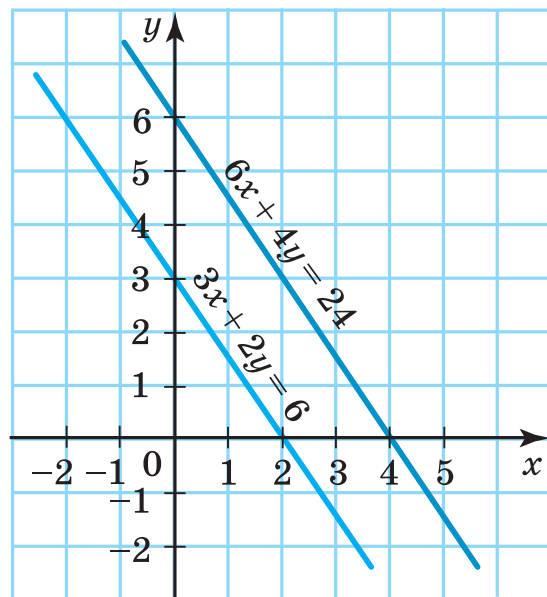
Очевидно, що не існує таких значень змінних x і y , для яких би одночасно виконувалися рівності $3x + 2y = 6$ і $3x + 2y = 12$.

Отже, система рівнянь розв'язків не має.

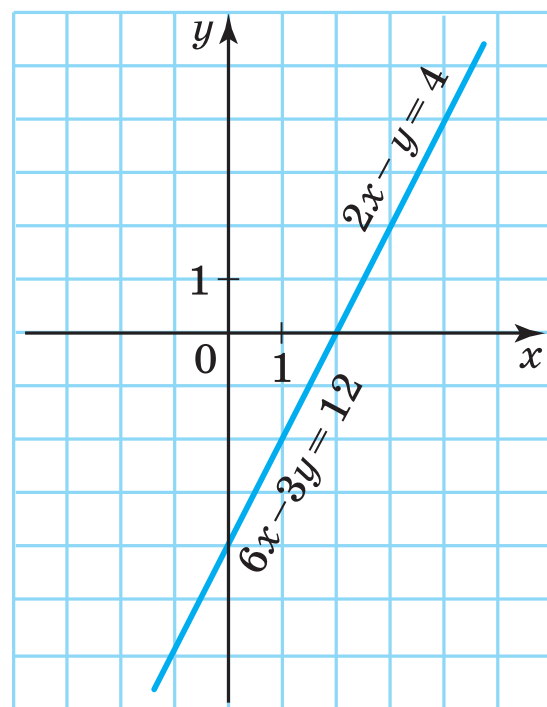
Відповідь: немає розв'язків.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 6x - 3y = 12. \end{cases}$$



Мал. 27.2



Мал. 27.3

Розв'язання. 1-й спосіб. Побудуємо графіки рівнянь в одній координатній площині (мал. 27.3). Графіки рівнянь збігаються, тому ця система має безліч розв'язків. Будь-яка пара чисел, що є розв'язком першого рівняння, є розв'язком і другого. Щоб записати до системи відповідь, виразимо y через x з першого рівняння: $y = 2x - 4$. Так, будь-яка пара чисел вигляду $(x; 2x - 4)$, де x – довільне число, є розв'язком даної системи.

2-й спосіб. Поділивши обидві частини другого рівняння на 3, матимемо:

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Очевидно, що маємо два однакових рівняння, отже, їхні графіки збігаються. Далі міркуємо так само, як у *1-му способі*.

Відповідь: $(x; 2x - 4)$, де x – довільне число.

А ще раніше...

Китайські математики вміли розв'язувати системи лінійних рівнянь ще дві тисячі років тому. Вони винайшли загальний метод розв'язування таких систем, причому не тільки з двома, а й з більшою кількістю рівнянь і змінних.

А давньогрецький математик Діофант (бл. III ст. до н. е.) розв'язував і деякі системи нелінійних рівнянь з двома змінними. Тому надалі рівняння з кількома змінними, для яких потрібно знайти розв'язки в натуральних числах (натуральні розв'язки рівняння), стали називати **діофантовими** рівняннями.

- ? Що називають розв'язком системи рівнянь з двома змінними?
- Що означає розв'язати систему рівнянь?
 - Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними?
 - Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома змінними графічно?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

1163. (Усно.) Яка з даних систем є системою двох лінійних рівнянь з двома змінними:

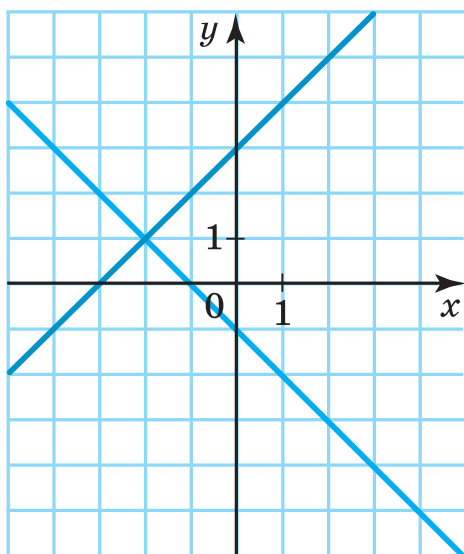
$$1) \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y^2 = 9; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 7x - 4y = 3; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x - y = 9, \\ xy = 5; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ x - y = -9? \end{cases}$$

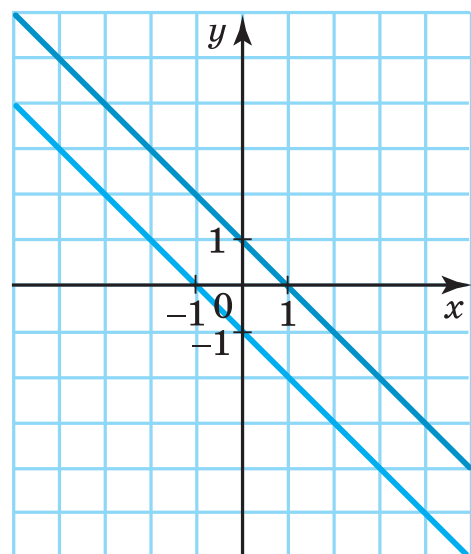
1164. (Усно.) Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1 \end{cases}$ пара чисел: 1) (3; 4); 2) (4; 3); 3) (6; 1)?

1165. Яка з даних пар чисел є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$
1) (5; 0); 2) (2; 3); 3) (3; 2)?

1166. (Усно.) Скільки розв'язків має система, графіки рівнянь якої зображено на малюнку 27.4? На малюнку 27.5?



Мал. 27.4



Мал. 27.5

2**1167.** (Усно.) Чи є пара чисел $(-2; 1)$ розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3x - 7y = -13; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ 9x - 11y = 29; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x = 5 - 9y, \\ 7y - 12x = 31? \end{cases}$$

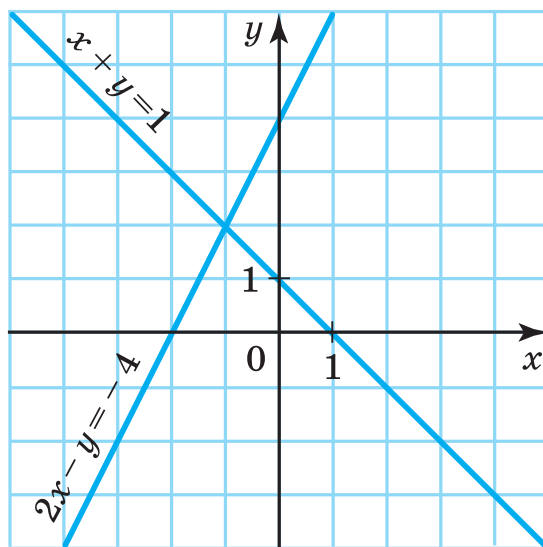
1168. Яка з пар $(3; -4)$, $(7; 2)$, $(4; -3)$ є розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} 2x - 3y = 17, \\ 5x + 2y = 14; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - 7y = 0, \\ 3x + 5y = 31? \end{cases}$$

1169. Складіть систему лінійних рівнянь з двома змінними, розв'язком якої є пара чисел:

$$1) (1; -3);$$

$$2) (4; 5).$$

1170. Знайдіть координати точки перетину прямих, які зображено на малюнку 27.6. Запишіть відповідну цим прямим систему рівнянь. Перевірте розв'язок, підставивши координати знайденої точки в кожне з рівнянь.

Мал. 27.6

1171. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = -x, \\ y = 4 + x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = 2x, \\ y = 3 + x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = 2, \\ x + 2y = -1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x - y = 1, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

1172. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = x, \\ y = 6 - x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = -2x, \\ y = 4 - x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y = 1, \\ x - 2y = 4; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x + y = 7, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

3 **1173.** Пара $(2; -5)$ – розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x + by = 5, \\ ax - 6y = 13. \end{cases} \text{ Знайдіть } a \text{ і } b.$$

1174. Знайдіть a і b , якщо пара $(10; -2)$ є розв'язком системи

$$\text{рівнянь } \begin{cases} ax - 5y = 17, \\ 3x + by = 9. \end{cases}$$

1175. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x - y = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 7y = 12, \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$$

1176. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x - 3y = -10, \\ 6x - y = 2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 5y = -4, \\ 7x - 2y = 25. \end{cases}$$

1177. З'ясуйте, чи має система розв'язки і скільки:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + y = 7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 0,5x - y = 4, \\ -x + 2y = -8; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 5y = 7, \\ y = -0,2x; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

1178. Чи має система розв'язки і скільки:

$$1) \begin{cases} x + y = 7, \\ 3x - y = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - 2y = 5, \\ 2x - 4y = 7; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = 2y, \\ 1,5x - 3y = 0? \end{cases}$$

1179. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y = -3, \\ x + 5y = 4. \end{cases}$ Перевірте, чи є одержаний розв'язок точним. Чи є розв'язком даної системи пара чисел $\left(-2\frac{1}{9}; 1\frac{2}{9}\right)$?

1180. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$ Перевірте, чи є одержаний розв'язок точним. Чи є розв'язком даної системи пара чисел $(1,9; 1,7)$?

4 **1181.** Не виконуючи побудови, доведіть, що система рівнянь $\begin{cases} x - 7y = 8, \\ -4x + 28y = -31 \end{cases}$ не має розв'язків.

1182. Не виконуючи побудови, доведіть, що система рівнянь $\begin{cases} 2x + 5y = 18, \\ -3x - 7,5y = -27 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

1183. Знайдіть які-небудь розв'язки системи $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ -9x - 3y = -15. \end{cases}$ Скільки всього розв'язків вона має? Розв'яжіть її.

1184. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ -6x + 4y = -10; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 3y = -4, \\ 3x + 9y = 12. \end{cases}$$

1185. До рівняння $x + 3y = 5$ доберіть друге рівняння так, щоб одержана система рівнянь мала:

- 1) лише один розв'язок;
- 2) безліч розв'язків.

1186. До рівняння $2x - y = 7$ доберіть друге рівняння так, щоб одержана система рівнянь не мала розв'язків.

Вправи для повторення

1187. Які з точок $A(4; -2)$; $B(0; 0)$; $C(-1; -5)$; $D(1; 2)$ належать графіку прямої пропорційності:

1) $y = -0,5x$;

2) $y = 5x$?

1188. Спростіть вираз:

1) $7m(m - 3) - 3(m - 2)(m + 2)$;

2) $(1 - 2x)(2x + 1) - (3x - 1)^2$;

3) $(2x + 3y)^2 - (x + 3y)(2x - y)$;

4) $(4a - 5b)(5b + 4a) - (2a - 5b)^2$.

1189. Доведіть, що вираз $-x^2 + 8x - 17$ для будь-яких значень x набуває лише від'ємних значень. Якого найбільшого значення набуває цей вираз і для якого значення x ?

Життєва математика

1190. Тариф на послуги таксі в одній з компаній-перевізників формується так: пасажир сплачує по 6 грн за кожний кілометр шляху та додатково 30 грн за приїзд машини. Задайте формулою залежність витрат p (у грн) на одну поїздку від довжини шляху s (у км).

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1191. Виразіть з рівняння змінну y через x або x через y :

1) $x - 4y = -5$;

2) $8x - y = 1$;

3) $2x - 3y = 5$;

4) $3x + 5y = -10$.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

1192. Припустимо, що вираз $(4 - 3x)^{2025}$ записано у вигляді многочлена. Знайдіть суму коефіцієнтів цього многочлена.

§ 28. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки

Поняття про спосіб підстановки

Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь є досить громіздким і до того ж не завжди допомагає знайти точні розв'язки. Розглянемо інші (не графічні) способи розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними, їх називають *аналітичними*. Почнемо зі **способу підстановки**.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ -3x + 4y = -10. \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язання. З першого рівняння виразимо змінну y через змінну x : $y = 3 - 2x$.

Підставимо вираз $3 - 2x$ у друге рівняння замість y . Маємо:

$$\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ -3x + 4(3 - 2x) = -10. \end{cases} \quad (2)$$

Тепер друге рівняння системи (2) містить лише змінну x .

Розв'яжемо його: $-3x + 12 - 8x = -10$;

$$-11x = -22$$

$$x = 2.$$

Підставимо число 2 замість x у рівність $y = 3 - 2x$. Одержимо

відповідне значення y : $y = 3 - 2 \cdot 2$;

$$y = -1.$$

Пара $(2; -1)$ є розв'язком кожного з рівнянь системи (2), отже, є розв'язком системи (2). Ця пара є розв'язком кожного з рівнянь системи (1) і тому є розв'язком системи (1).

Відповідь: $(2; -1)$.

Рівносильні системи рівнянь

Системи рівнянь з двома змінними, які мають одні й ті самі розв'язки, називають **рівносильними**. Системи, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

Розв'язуючи систему (1) способом підстановки, ми замінили її рівносильною їй системою (2), друге рівняння якої містило лише одну змінну.

Алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки

Послідовність дій, якої слід дотримуватися, розв'язуючи систему лінійних рівнянь з двома змінними *способом під-*

становки, розглянемо на прикладі системи
$$\begin{cases} 3x - 7y = 1, \\ 4x + 9y = 38. \end{cases}$$

Дія		Результат
1	Виразити з якого-небудь рівняння системи одну змінну через другу (наприклад, з першого)	$3x = 1 + 7y,$ $x = \frac{1 + 7y}{3}$
2	Одержаний для цієї змінної вираз підставити в друге рівняння системи	$4 \cdot \frac{1 + 7y}{3} + 9y = 38$

Дія		Результат
3	Розв'язати одержане рівняння з однією змінною, тобто знайти значення цієї змінної	$4(1 + 7y) + 3 \cdot 9y = 3 \cdot 38,$ $4 + 28y + 27y = 114,$ $55y = 110,$ $y = 2$
4	Знайти відповідне їй значення другої змінної	$x = \frac{1 + 7 \cdot 2}{3},$ $x = 5$
5	Записати відповідь	Відповідь: (5; 2)

Спосіб підстановки зручно застосовувати тоді, коли хоча б один з коефіцієнтів при змінних x або y дорівнює 1 або -1 . Саме змінну з таким коефіцієнтом доцільно виразити через іншу.

Способом підстановки можна розв'язати й інші системи.

Приклад 2. Розв'язати систему
$$\begin{cases} 4(y + 3) - 3(x - 1) = 40, \\ \frac{x + 2}{3} + \frac{y - 4}{2} = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Розв'язання. У першому рівнянні системи розкриємо дужки, а обидві частини другого рівняння помножимо на 6. Матимемо:

$$\begin{cases} 4y + 12 - 3x + 3 = 40, \\ 2(x + 2) + 3(y - 4) = -2. \end{cases}$$

Спростивши кожне з рівнянь системи, зведемо її до вигляду:

$$\begin{cases} -3x + 4y = 25, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Далі застосуємо спосіб підстановки. Виразимо з першого рівняння y через x : $y = \frac{25 + 3x}{4}$. Підставивши цей вираз

у друге рівняння і розв'язавши його, одержимо, що $x = -3$.

Далі знайдемо відповідне йому значення y : $y = \frac{25 + 3 \cdot (-3)}{4}$,

тобто $y = 4$.

Відповідь: $(-3; 4)$.

? Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

1193. (Усно.) У якій з рівностей 1–3 правильно виконано підстановку для розв'язування системи рівнянь

$$\begin{cases} x = 7y - 5, \\ 2x + 3y = 9? \end{cases}$$

1) $2x + 3(7y - 5) = 9$;

2) $2 + (7y - 5) + 3y = 9$;

3) $2(7y - 5) + 3y = 9$.

1194. Яка з рівностей є правильно застосованою підстановкою для розв'язування системи рівнянь

$$\begin{cases} y = 4x + 3, \\ 7x + 2y = 9? \end{cases}$$

1) $7(4x + 3) + 2y = 9$;

2) $7x + 2 - (4x + 3) = 9$;

3) $7x + 2(4x + 3) = 9$.

2

1195. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 7x = 21, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x - y = 17, \\ -2y = 10. \end{cases}$

1196. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x = y + 2, \\ 4x - 8y = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x - 3, \\ 5x + 2y = 29. \end{cases}$

1197. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} -4x = 8, \\ 5x - 2y = 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x + 5, \\ 7x + 3y = -5. \end{cases}$$

1198. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = 7, \\ 2x + y = 9; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = -2, \\ x - 2y = 5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y - x = 0, \\ 4x + y = 15; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 5x + 2y = 2, \\ x - 2y = 10; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x - 3y = 7, \\ 2x - 3y = -3; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 5x - 3y = -19, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$$

1199. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

$$1) \begin{cases} x + y = 4, \\ 3x + y = 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = 0, \\ x - 2y = 8; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y - x = -5, \\ 2x + y = 4; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

1200. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x + y = 4$ і $2x + 3y = 9$.

1201. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x - y = 3$ і $3x + 2y = 14$.

3 **1202.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 7y = 29; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 8x - 5y = 41, \\ 4x + 3y = -7; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2a - 5b = 0, \\ -7a + 4b = 27; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 10m - 2n = 39, \\ 9m + 4n = 38. \end{cases}$$

1203. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 4x + 3y = 0, \\ 5x - 7y = -43; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 9y = -59, \\ 5x - 4y = 38; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3p - 7q = 0, \\ 2p + 9q = 41; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 6a - 7b = 51, \\ 2a + 3b = -15. \end{cases}$$

1204. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 7(x - 3) + 8 = 4 + 5x, \\ 4(x - y) - 7y = 6,5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4(x + y) - 3y = 2, \\ 9(x - 2y) - 6x = -11. \end{cases}$$

1205. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 4(x + y) - 8y = -4, \\ 7(y + 1) - (y + 3) = 19; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 8(x + y) - 12y = 6, \\ 6(3x - y) + 18x = 13. \end{cases}$$

1206. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{1}{8}(x - y) = 9, \\ \frac{1}{3}(x + y) = 7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 0,2(2x + y) = 3, \\ 0,7(x - 4y) = -1,05. \end{cases}$$

1207. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 0,4(x + y) = 12, \\ 0,6(x - y) = 9; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{1}{7}(2x + y) = 13, \\ \frac{1}{3}(x - 3y) = 14. \end{cases}$$

4

1208. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{5} + \frac{y-1}{3} = 1, \\ \frac{x+2}{6} + \frac{y+2}{3} = 2. \end{cases}$$

1209. Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{x-4}{2} + \frac{y+11}{4} = 1, \\ \frac{x+7}{3} + \frac{y-4}{7} = 2. \end{cases}$$

1210. Доведіть, що графіки рівнянь $2x - 3y = 4$ і $4x - 6y = 9$ є паралельними прямими.

1211. Графік функції $y = kx + l$ проходить через точки $M(9; 1)$ і $N(-6; -4)$. Знайдіть k і l .

1212. Графіком функції $y = kx + l$ є пряма, що проходить через точки $A(-2; -4)$ і $B(4; 11)$. Задайте цю функцію формулою.

1213. Для яких значень m система рівнянь:

1)
$$\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 4x + my = 10 \end{cases}$$
 не має розв'язків;

2)
$$\begin{cases} x - 3y = 5, \\ mx - 12y = 20 \end{cases}$$
 має безліч розв'язків?

Вправи для повторення

1214. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = \frac{2}{3}x$.

За допомогою графіка знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -6; 0; 3$.
- 2) значення x , для яких $y = -2; 0; 4$.

1215. Розкладіть на множники многочлен:

- 1) $9m^2 + 12m^5 - 18m^3$;
- 2) $3x^4y^2 - 9x^2y^3 + 12x^3y$;
- 3) $a^6 - 6 - 2a^2 + 3a^4$;
- 4) $pq - 6p + p^2 - 6q$.

1216. Доведіть, що рівняння не має розв'язків:

- 1) $x^2 + 4 = 0$;
- 2) $x^2 - 6x + 13 = 0$;
- 3) $4x^2 - 12x + 16 = 0$;
- 4) $x^2 + x + 2 = 0$.



Життєва математика

1217. Під час чищення зубів мати витрачає воду економно (доки чистить зуби, кран закручує), а батько цього не робить. За показниками лічильника води діти встановили, що мати витрачає щоранку 1,5 л води, а батько – вдвічі більше.

1) На скільки літрів води щомісяця більше витрачає батько, ніж мати?

2) *Практична діяльність.* Дізнайтеся, скільки коштує 1 м³ води у вашій місцевості, та визначте, скільки коштів може заощадити ця родина за місяць (30 днів), якщо батько під час чищення зубів також буде економно витратити воду.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

1218. Якщо добуток чотирьох послідовних натуральних чисел збільшити на 1, то він дорівнюватиме квадрату деякого натурального числа. Доведіть це.

§ 29. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання

Поняття про спосіб додавання

Тепер розглянемо ще один аналітичний спосіб розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними – **спосіб додавання**. Розв'язуючи систему способом додавання, ми переходимо до рівносильної їй системи, одне з рівнянь якої міститиме тільки одну змінну.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} 3x + 5y = 1, \\ 4x - 5y = -22. \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язання. У цій системі коефіцієнти при змінній y є протилежними числами. Знайдемо суму лівих частин рівнянь системи і суму правих їхніх частин. Зрозуміло, що ці суми будуть між собою рівними. Сума лівих частин містить подібні доданки, тому в результаті додавання отримаємо рівняння з однією змінною: $7x = -21$.

Додавання рівнянь системи, яке ми застосували, називають *почленним додаванням*. Замінімо одне з рівнянь початкової системи, наприклад перше, рівнянням $7x = -21$. Матимемо систему:

$$\begin{cases} 7x = -21, \\ 4x - 5y = -22. \end{cases} \quad (2)$$

З першого рівняння системи (2) маємо: $x = -3$. Підставивши це значення в друге рівняння системи (2), одержимо, що $y = 2$. Отже, пара чисел $(-3; 2)$ є розв'язком системи (2).

Переконаємося, що ця пара чисел є не тільки розв'язком системи (2), а й розв'язком системи (1). Для цього в кожне з рівнянь системи (1) підставимо замість x число -3 , а замість y — число 2 . Тоді в лівій частині першого рівняння одержимо $3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 1$, отже, значення лівої і правої частин збігаються, тому пара $(-3; 2)$ є розв'язком першого рівняння. У лівій частині другого рівняння одержимо $4 \cdot (-3) - 5 \cdot 2 = -22$, тобто значення лівої частини рівняння дорівнює значенню правої його частини. Отже, пара $(-3; 2)$ є розв'язком і другого рівняння системи. Оскільки пара чисел $(-3; 2)$ є розв'язком кожного з рівнянь системи (1), то вона є розв'язком системи (1).

Отже, системи (1) і (2) мають один і той самий розв'язок, тому є рівносильними.

Відповідь: $(-3; 2)$.

Алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання

Способом додавання зручно розв'язувати системи, у рівняннях яких коефіцієнти при одній і тій самій змінній є протилежними числами.

Зауважимо, що будь-яку систему лінійних рівнянь з двома змінними можна звести до вигляду, зручного для застосування способу додавання. Розглянемо це на прикладі.

Приклад 2. Розв'язати систему
$$\begin{cases} 5x + 2y = 10, \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Рівняння цієї системи не містять протилежних коефіцієнтів при однакових змінних, що не є зручним для способу додавання. Але якщо помножити обидві частини першого рівняння на число -2 , то коефіцієнти при змінній y в обох рівняннях стануть протилежними. Після цього можна почленно додати рівняння системи. Запишемо це розв'язання:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = 10, \\ 7x + 4y = 8; \end{array} \right. \quad | \cdot (-2) \\ \left\{ \begin{array}{l} -10x - 4y = -20, \\ 7x + 4y = 8; \end{array} \right. \quad | + \\ \hline -3x = -12, \\ x = 4. \end{array}$$

Підставимо знайдене значення x у друге рівняння системи, щоб знайти y . Отримаємо: $7 \cdot 4 + 4y = 8$, звідки $y = -5$.

Остаточно маємо:
$$\begin{cases} x = 4, \\ y = -5. \end{cases}$$

Відповідь: $(4; -5)$.

Послідовність дій, якої слід дотримуватися, розв'язуючи систему лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання, розглянемо на прикладі системи

$$\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19. \end{cases}$$

Дія		Результат
1	Помножити за потреби обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами	$\begin{cases} 7x - 4y = 2, & \cdot 3 \\ 5x + 3y = 19; & \cdot 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 21x - 12y = 6, \\ 20x + 12y = 76 \end{cases}$
2	Додати почленно рівняння системи	$41x = 82$
3	Розв'язати одержане рівняння з однією змінною	$x = 2$
4	Підставити знайдене значення змінної в одне з рівнянь початкової системи і знайти відповідне їй значення іншої змінної	$7 \cdot 2 - 4y = 2,$ $-4y = -12,$ $y = 3$
5	Записати відповідь	<i>Відповідь:</i> (2; 3).

? Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **1219.** (Усно.) Яке рівняння одержимо, якщо почленно додамо рівняння системи:

$$1) \begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - y = 8; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4x + 3y = 9, \\ -4x + y = 1? \end{cases}$$

1220. (Усно.) На яке число потрібно помножити обидві частини першого рівняння системи, щоб у рівняннях коефіцієнти при змінній y стали протилежними:

$$1) \begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x - 2y = 10; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 3x + 21y = 7? \end{cases}$$

1221. На яке число потрібно помножити обидві частини першого рівняння, щоб у рівняннях коефіцієнти при змінній x стали протилежними:

$$1) \begin{cases} x - 4y = 9, \\ -2x + 7y = 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 7y = 19, \\ 12x - 8y = 4? \end{cases}$$

2 **1222.** (Усно.) Назвіть спосіб (підстановки чи додавання), яким зручніше розв'язувати систему:

$$1) \begin{cases} 3x + y = 9, \\ 17x + 19y = 15; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x + 7y = 8, \\ 10x - 7y = 17; \end{cases}$$
$$3) \begin{cases} 4x + 15y = 27, \\ 12x + 17y = 49; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x + y = 10, \\ 2015x + 2016y = 2017. \end{cases}$$

1223. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 9; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$$
$$3) \begin{cases} 4x + 3y = 7, \\ -4x - y = -5; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x - 8y = 7, \\ -2x + 7y = 5. \end{cases}$$

1224. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + y = 12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ -3x + 5y = -1. \end{cases}$$

1225. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 4x + 3y = 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 7x + 2y = 5, \\ 7x - 3y = 45. \end{cases}$$

1226. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} 4x + y = 7, \\ 5x + y = -1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 2x - 4y = -9. \end{cases}$$

1227. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} x + y = 4, \\ 3x - 5y = 20; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + 7y = 11. \end{cases}$$

1228. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 7x + y = 2, \\ 5x - 4y = 25. \end{cases}$$

1229. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 7x + 2y = -3, \\ -14x + 3y = 20; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + 5y = 19, \\ 7x - 10y = 1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x + 5y = 7, \\ 2x - 3y = -2; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x + 9y = -1, \\ 7x + 36y = -8. \end{cases}$$

1230. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ -9x + 7y = 23; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4x + 2y = 2, \\ 5x - 4y = 9; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ 15x - 7y = 51; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 4m + 5b = 5, \\ 7m + 20b = 11. \end{cases}$$

3 1231. Знайдіть розв'язок системи способом додавання:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2a - 3b = 7, \\ 3a + 4b = 2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 10m - 6n = 18, \\ 15m + 7n = 59; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 14x - 8y = -6, \\ 21x + 10y = 2. \end{cases}$$

1232. Знайдіть розв'язок системи способом додавання:

$$1) \begin{cases} 3x + 4y = 10, \\ 5x - 7y = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 15x - 3y = -15, \\ 20x - 7y = -41. \end{cases}$$

1233. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 5(x - 2) = 2y - 1, \\ 3(x + 3) = 12(y + 3); \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4(a + 2b) - 5a = 0, 4, \\ 7(3a - 4b) + 3b = 5, 9. \end{cases}$$

1234. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 7(x + 3) = 3y + 1, \\ 4(2 - x) = 5(y + 1) + 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4(m - 2n) - 7m = 9, 6, \\ 5(4m + 3n) + 8n = -18, 5. \end{cases}$$

4 1235. Складіть рівняння прямої, графік якої проходить через точки:

1) $A(4; -4)$ і $B(12; -1)$;

2) $M(-3; 6)$ і $N(9; -2)$.

1236. Графік лінійної функції проходить через точки $(-4; 5)$ і $(12; 1)$. Задайте цю функцію формулою.

1237. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{2-x}{6} + \frac{y+4}{3} = 2\frac{5}{6}, \\ \frac{x+4}{12} - \frac{2-y}{6} = \frac{5}{12}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x-1)^2 + y = (x+2)^2 - 23, \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+7)^2. \end{cases}$$

1238. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{x+3}{4} - \frac{y-4}{8} = 1\frac{3}{4}, \\ \frac{x-4}{6} + \frac{y+2}{9} = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x-1)(y+2) = x(y-1), \\ x(y+3) = (x+1)(y-2). \end{cases}$$

1239. З'ясуйте, чи має система рівнянь розв'язки і скільки:

$$1) \begin{cases} 3x - y = 2, \\ -6x + 2y = 5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -4x + 3y = 7, \\ -8x + 6y = 14. \end{cases}$$

Вправи для повторення

1240. Чи належать графіку функції $y = -4,5x + 1$ точки:

$A(-2; 10)$, $B(0; -1)$, $C(4; 17)$, $D(10; -44)$?

1241. Пара чисел $(-2; -3)$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} ax - 2y = 8, \\ bx - ay = 7. \end{cases} \text{ Знайдіть } a \text{ і } b.$$

1242. Які одночлени потрібно вписати у клітинки, щоб утворилася тотожність:

1) $(7m - \square)^2 = \square - \square + 25a^8$;

2) $(\square + \square)^2 = 36p^4 + \square + 121b^2$;

3) $(3p + \square)^2 = \square + 24p^2m^7 + \square$;

4) $(\square - \square)^2 = \square - 32mn^2 + 16n^4$?



Життєва математика

- 1243.** 1) Визначте масу складників у салаті «Вітамінний», маса якого 400 г, якщо моркви там у 4 рази менше від загальної маси салату, селери – стільки само, скільки й моркви, яблук – на 60 г більше, ніж селери, горіхів – у 5 разів менше, ніж моркви, лимонного соку – у 2 рази менше, ніж горіхів, і ще салат містить один зубчик часнику.
2) *Практичне завдання.* Дізнайтеся рецепти інших корисних і простих у приготуванні салатів, спробуйте їх приготувати та додайте до свого раціону.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 1244.** Чи існують такі цілі числа x і y , для яких справджується рівність $x^2 + 2018 = y^2$?

§ 30. Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь

Задача, математичною моделлю якої є система рівнянь

Ми вже розглядали задачі, які можна розв'язати за допомогою рівнянь. Математичною моделлю задачі може бути не тільки рівняння, а й система рівнянь. Зазвичай це стосується тих задач, де невідомими є значення двох або більше величин.

Приклад 1. За 7 шоколадних батончиків і 2 плитки шоколаду заплатили 85 грн. Скільки коштує батончик і скільки плитка шоколаду, якщо відомо, що три батончики дорожчі за одну плитку на 3 грн?

Розв'язання. Нехай батончик коштує x грн, а плитка шоколаду – y грн. Тоді сім батончиків коштують $7x$ грн, а дві плитки

шоколаду – $2y$ грн. Оскільки разом за таку кількість батончиків і плиток шоколаду заплатили 85 грн, маємо рівняння:

$$7x + 2y = 85.$$

Вартість трьох батончиків становить $3x$ грн, і вони дорожчі за плитку шоколаду на 3 грн. Тому одержимо ще одне рівняння: $3x - y = 3$.

Щоб відповісти на запитання задачі, ми маємо знайти такі значення x і y , які задовольняли б обидва рівняння, тобто задовольняли систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 85, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо, що $x = 7$; $y = 18$. Отже, вартість шоколадного батончика – 7 грн, а вартість плитки шоколаду – 18 грн.

Відповідь: 7 грн; 18 грн.

Зауважимо, що цю задачу, як і деякі інші із цього параграфу, можна розв'язати і за допомогою рівняння з однією змінною. Але часто скласти систему рівнянь до задачі простіше, ніж скласти до неї рівняння з однією змінною.

Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою системи рівнянь

Розв'язуючи задачу за допомогою системи рівнянь, слід дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) *позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x і y);*
- 2) *за умовою задачі скласти систему рівнянь;*
- 3) *розв'язати одержану систему;*
- 4) *проаналізувати знайдені значення змінних відповідно до умови задачі, дати відповідь на запитання задачі;*
- 5) *записати відповідь.*

Приклад 2. За 2 год проти течії і 5 год за течією моторний човен долає 120 км. За 2 год за течією і 1 год проти течії цей самий човен долає 51 км. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії.

Розв'язання. Нехай власна швидкість човна x км/год, а швидкість течії – y км/год. Тоді швидкість човна за течією річки дорівнює $(x + y)$ км/год, а швидкість човна проти течії – $(x - y)$ км/год. За 5 год руху за течією човен долає $5(x + y)$ км, за 2 год проти течії – $2(x - y)$ км, а разом це становить 120 км. Маємо рівняння: $5(x + y) + 2(x - y) = 120$.

Міркуючи аналогічно, за умовою задачі можна скласти ще одне рівняння: $2(x + y) + (x - y) = 51$.

Маємо систему рівнянь:
$$\begin{cases} 5(x + y) + 2(x - y) = 120, \\ 2(x + y) + (x - y) = 51. \end{cases}$$

Розв'язавши яку, одержимо:
$$\begin{cases} x = 16,5, \\ y = 1,5. \end{cases}$$

Отже, власна швидкість човна – 16,5 км/год, а швидкість течії – 1,5 км/год.

Відповідь: 16,5 км/год; 1,5 км/год.

? Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи задачу за допомогою системи рівнянь?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2 **1245.** У легкоатлетичній секції тренуються 32 спортсмени, причому дівчат серед них на 4 більше, ніж хлопців. Скільки дівчат і скільки хлопців тренується в цій секції?

1246. За дві години кухар наліпив 260 пельменів, причому за першу годину – на 20 пельменів менше, ніж за другу.

Скільки пельменів наліпив кухар за першу годину і скільки – за другу?

- 1247.** За олівець і три зошити заплатили 32 грн, а за три олівці і зошит – 24 грн. Скільки коштує один олівець і скільки – один зошит?
- 1248.** За 2 год пішки і 1 год на велосипеді туристка пододала 18 км, а за 1 год пішки і 2 год на велосипеді – 27 км. З якою швидкістю туристка рухалася пішки і з якою – на велосипеді?
- 1249.** У касі крамниці після переобліку залишилося 12 монет по 50 к. і по 1 грн, усього на суму 8 грн. Скільки монет по 50 к. і скільки по 1 грн залишилося в касі?
- 1250.** Було придбано 16 зошитів у клітинку і лінійку, усього на суму 328 грн. Зошит у клітинку коштує 22 грн, а в лінійку – 18 грн. Скільки зошитів у клітинку і скільки зошитів у лінійку було придбано?
- 1251.** За 3 футбольних і 2 волейбольних м'ячі заплатили 1088 грн. Скільки коштує футбольний м'яч і скільки волейбольний, якщо два волейбольних м'ячі на 192 грн дорожчі за один футбольний?
- 1252.** 2 акумулятори і 3 батарейки разом коштують 252 грн. Скільки коштує один акумулятор і скільки одна батарейка, якщо акумулятор коштує стільки само, скільки 3 батарейки?
- 1253.** Основа рівнобедреного трикутника на 2 см більша за його бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 26 см.
- 1254.** Довжина прямокутника на 8 м більша за ширину. Знайдіть довжину і ширину прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 м.

3

- 1255.** Човен за 3 год руху за течією і 2 год руху проти течії долає 92 км. За 9 год руху за течією човен долає відстань у 5 разів більшу, ніж за 2 год руху озером. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії.
- 1256.** Човен рухався 2 год за течією і 5 год проти течії, подолавши за цей час 110 км. Швидкість човна проти течії становить 70 % від швидкості човна за течією. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії.
- 1257.** З пунктів A і B , відстань між якими 168 км, одночасно вирушають велосипедистка і мотоцикліст. Якщо вони будуть рухатися назустріч одне одному, то зустрінуться через 3 год. А якщо рухатимуться в одному напрямку, то мотоцикліст наздожене велосипедистку через 6 год. Знайдіть швидкість кожного з них.
- 1258.** Сума двох чисел дорівнює 62. Знайдіть кожне із чисел, якщо 70 % від одного і 60 % від другого разом становлять 39,6.
- 1259.** 20 % від одного числа на 2,4 більше за 10 % від другого. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 72.
- 1260.** Матері разом з донькою 42 роки. Через рік мати стане втричі старшою за доньку. Скільки років кожній з них зараз?
- 1261.** Розв'яжіть систему рівнянь. Складіть задачу, яка б розв'язувалася за допомогою цієї системи:

$$1) \begin{cases} x + y = 17, \\ x - y = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 3y = 15, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

- 1262.** Розв'яжіть систему рівнянь. Складіть задачу, яка б розв'язувалася за допомогою цієї системи:

$$1) \begin{cases} x - y = 8, \\ x + y = 12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y = 18, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$$

- 1263.** У ящику і кошику разом 95 яблук. Якщо кількість яблук у ящику зменшити вдвічі, а кількість яблук у кошику збільшити на 25, то яблук у ящику і кошику стане порівну. Скільки яблук у ящику і скільки – в кошику?
- 1264.** Сума двох чисел дорівнює 45. Знайдіть ці числа, якщо 60 % від першого з них дорівнюють 75 % від другого.
- 1265.** Знайдіть два числа, якщо їх сума дорівнює 200 і $\frac{11}{24}$ від одного з них дорівнюють $\frac{3}{8}$ від другого.
- 1266.** Змішали два види цукерок вартістю 60 грн і 75 грн за кілограм. Після цього утворилося 20 кг суміші вартістю 66 грн за кілограм. По скільки кілограмів цукерок кожного виду взяли для суміші?
- 1267.** З двох сортів печива вартістю 40 грн і 55 грн за кілограм утворили 25 кг суміші вартістю 49 грн за кілограм. По скільки кілограмів печива кожного виду взяли?
- 4** **1268.** У двох бідонах разом було 75 л олії. Після того як половину олії з першого бідона перелили в другий, там олії стало в 4 рази більше, ніж у першому. По скільки літрів олії було в кожному бідоні спочатку?
- 1269.** На двох полицях разом 57 книжок. Після того як з першої полиці переставили 5 книжок на другу, там їх стало вдвічі більше, ніж на першій. По скільки книжок було на кожній полиці спочатку?
- 1270.** За 5 світильників і 4 ліхтарики заплатили 896 грн. Після того як світильники подешевшали на 15 %, а ліхтарики подорожчали на 10 %, один світильник і один ліхтарик разом стали коштувати 196 грн. Якою була початкова вартість світильника і якою – ліхтарика?

- 1271.** Два кондитерських цехи за день мали разом виготовити 300 тортів. Коли перший цех виконав 55 % свого завдання, а другий – 60 % свого, виявилось, що перший цех виготовив на 27 тортів більше, ніж другий. По скільки тортів мав виготовити кожен цех?
- 1272.** Якщо чисельник даного дроби збільшити на 7, то дріб дорівнюватиме $\frac{2}{3}$. Якщо знаменник даного дроби збільшити на 2, то дріб дорівнюватиме 0,25. Знайдіть цей дріб.
- 1273.** Якщо чисельник дроби зменшити на 2, то дріб дорівнюватиме 0,5. Натомість, якщо знаменник дроби збільшити на 11, то дріб дорівнюватиме $\frac{1}{3}$. Знайдіть цей дріб.
- 1274.** Скільки грамів кожного з 2-відсоткового і 6-відсоткового розчинів солі потрібно взяти, щоб отримати 200 г 5-відсоткового розчину?
- 1275.** В одному сплаві міститься 9 % цинку, а в другому – 24 %. По скільки грамів кожного сплаву потрібно взяти, щоб одержати зливок масою 260 г, що містить 15 % цинку?
- 1276.** Чотири роки тому батько був у 8 разів старший за сина, а через 20 років батько стане вдвічі старший за сина. Скільки років кожному з них зараз?
- 1277.** Якщо суму цифр двоцифрового числа збільшити в 5 разів, то вона дорівнюватиме самому числу. А якщо його цифри поміняти місцями, то воно збільшиться на 9. Знайдіть це число.

Вправи для повторення

1278. Розкладіть на множники многочлен:

1) $m^2 + 10m + 25$; 2) $c^2 - 8c + 16$;
3) $p^2 - 0,36$; 4) $-49a^2 + b^2$.

1279. Спростіть вираз:

1) $2x(3x - 4x^3) - (x + 3x^2)^2$;
2) $2p^2(2p^2 - 6pt) - (2p^2 - 3tp)^2$.

1280. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -3x, & \text{якщо } x < -1, \\ 3, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x + 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

Життєва математика

1281. Діти 11–15 років на кожний кілограм своєї маси мають щоденно вживати 2,6 г білків, 2,3 г жирів, 10,4 г вуглеводів. Дізнайтеся власну масу тіла та визначте, скільки жирів, білків і вуглеводів маєте щоденно вживати ви.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

1282. *Задача Ньютона.* Трава на галявині росте рівномірно щільно й швидко. Відомо, що 70 корів з'їли би її за 24 дні, а 30 корів – за 60 днів. Скільки корів з'їли би всю траву за 96 днів?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. Яке з рівнянь є лінійним рівнянням з двома змінними?
- А. $2x^2 - 3x = 7$ Б. $2x^2 - 3y = 7$
В. $2x - 3y = 7$ Г. $2x - 3y^3 = 7$

2. Укажіть точку, що належить графіку рівняння $x + y = 6$.
A. (2; 3) **Б.** (2; 4) **В.** (3; 4) **Г.** (–2; –4)
3. Укажіть пару чисел, що є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 1. \end{cases}$$
A. (4; 3) **Б.** (–4; 3) **В.** (–4; –3) **Г.** (4; –3)
- 2** 4. Розв'язком якого рівняння є пара чисел (2; –1)?
A. $x + 3y = 5$ **Б.** $3x + y = 5$
В. $2x + y = 5$ **Г.** $x + y = 3$
5. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 4x + 3y = 11. \end{cases}$$
A. (2; 1) **Б.** (1; 2) **В.** (3; 1) **Г.** (1; 3)
6. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x - 7y = 11, \\ 3x + 7y = -4. \end{cases}$$
A. (1; 1) **Б.** (–1; 1) **В.** (–1; –1) **Г.** (1; –1)
- 3** 7. Серед розв'язків рівняння $x + 2y = -18$ знайдіть пару рівних між собою чисел.
A. (6; 6) **Б.** (–6; –6) **В.** (0; 0) **Г.** (–9; –9)
8. Для якого значення m графік рівняння $mx + 3y = 5$ проходить через точку (–2; 3)?
A. 2 **Б.** –2 **В.** 7 **Г.** –7
9. З пунктів A і B , відстань між якими 60 км, вирушили одночасно пішохід і велосипедистка. Якщо вони рухатимуться назустріч одне одному, то зустрінуться через 3 год, а якщо вони рухатимуться в одному напрямку, то велосипедист-

ка наздожене пішохода через 5 год. Знайдіть швидкість пішохода.

А. 3 км/год Б. 4 км/год

В. 4,5 км/год Г. 5 км/год

4 10. Скільки є пар натуральних чисел, які є розв'язками рівняння $2x + y = 9$?

А. три Б. чотири В. п'ять Г. безліч

11. Графік функції $y = kx + b$ проходить через точки $(1; 4)$ і $(-2; 13)$. Знайдіть k .

А. 7 Б. 3 В. -3 Г. -5

12. Для якого значення a система рівнянь $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ ax - 6y = 16 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

А. 4 Б. 2 В. 0 Г. -4

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 13. Установіть відповідність між графіком рівняння (1–3) та точками перетину графіка з осями координат (А–Г).

Графік рівняння

Точки перетину графіка з осями координат

1. $2x - 5y = 10$

А. $(-4; 0)$, $(0; 3)$

2. $5x + 3y = 15$

Б. $(5; 0)$, $(0; 3)$

3. $-3x + 4y = 12$

В. $(5; 0)$, $(0; -2)$

Г. $(3; 0)$, $(0; 5)$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО §§ 25-30

1 1. Яке з рівнянь є лінійним рівнянням з двома змінними:

1) $2x + 3y = 9$; 2) $2x + 3y^2 = 9$?

2. Чи є розв'язком рівняння $2x + y = 7$ пара чисел:

1) $(3; -5)$; 2) $(4; -1)$?

3. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 11, \\ x - y = 3 \end{cases}$ пара чисел:

1) $(6; 5)$; 2) $(7; 4)$?

2 4. Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 3x, \\ 2x + y = -5. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x + 3y = 3, \\ 4x - 3y = 24. \end{cases}$$

3 7. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2(x + 3) = 7y - 5, \\ 6(x - 3) - 5(y + 1) = -24. \end{cases}$

4 8. За 8 зошитів і 3 блокноти заплатили 93 грн. Після того як зошит подорожчав на 15 %, а блокнот подешевшав на 10 %, за один зошит і один блокнот заплатили 20,4 грн. Якими були початкові ціни зошита і блокнота?

Додаткові вправи

4 9. Побудуйте графік рівняння $\frac{x + 2}{4} + \frac{y - 3}{6} = -\frac{1}{12}$.

10. Графік функції $y = kx + b$ проходить через точки $(3; -4)$ і $(-12; -9)$. Знайдіть k і b .

11. Для якого значення a система рівнянь $\begin{cases} 7x - ay = 5, \\ 21x + 6y = 15 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 4

До § 25

- 1** 1283. Чи є пара чисел $(7; 1)$ розв'язком рівняння $x - y = 6$? Знайдіть ще чотири розв'язки цього рівняння.
- 2** 1284. Знайдіть два будь-яких розв'язки рівняння:
1) $2x + y = 4$; 2) $x - 3y = 7$.
- 3** 1285. Виразіть:
1) змінну y через змінну x з рівняння $7x - y = 18$;
2) змінну x через змінну y з рівняння $3x + 9y = 0$;
3) змінну y через змінну x з рівняння $13x - 2y = 6$;
4) змінну x через змінну y з рівняння $8x + 15y = 24$.
1286. Замініть «зірочки» числами так, щоб кожна з пар $(*; 3)$; $(6; *)$; $(*; -3)$; $(15; *)$ була розв'язком рівняння $x - 3y = 9$.
- 4** 1287. Доведіть, що рівняння з двома змінними не має розв'язків:
1) $x^2 + y^2 = -4$;
2) $|x| + y^2 + 1 = 0$;
3) $-|x| - |y| = 5$;
4) $2x^4 + 3|y| = -2$.
1288. Знайдіть усі пари цілих чисел, які є розв'язками рівняння $|x| + |y| = 2$.

До § 26

- 2** 1289. Побудуйте графік рівняння:
1) $x - y = 1$; 2) $1,5x + y = 7$;
3) $x - 4y = 5$; 4) $0,1x + 0,2y = 0,8$.

3 **1290.** Побудуйте в одній координатній площині графіки рівнянь $x + y = 5$ і $7x - 4y = 2$. Знайдіть координати точки їх перетину. Переконайтеся, що знайдена пара є розв'язком кожного з рівнянь.

1291. Ордината деякої точки прямої, що є графіком рівняння $-9x + 5y = 27$, дорівнює нулю. Знайдіть абсцису цієї точки.

4 **1292.** Побудуйте графік рівняння:

1) $|x| + y = 0$; 2) $|x| + x - y = 0$.

1293. Побудуйте ту частину графіка рівняння $2x + y = 6$, яка міститься в першій координатній чверті.

До § 27

1 **1294.** Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 8 \end{cases}$ пара чисел:

1) $x = 5; y = 5$; 2) $x = 4; y = 4$?

2 **1295.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = -4x, \\ 2x - y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = 3, \\ x + 2y = -3. \end{cases}$

3 **1296.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 0x + 3y = 6, \\ 3x - 2y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7,1x = -14,2, \\ 2x + 7y = 17. \end{cases}$

4 **1297.** Для якого значення a система рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ має безліч розв'язків;

2) $\begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ -6x + 4y = a \end{cases}$ не має розв'язків?

До § 28

2 1298. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x = y - 7, \\ 2x - y = -6; \end{cases} & 2) \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x - 5y = 21; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 3x - 4y = -19, \\ x + 7y = 27; \end{cases} & 4) \begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ 8x - y = -17. \end{cases} \end{array}$$

3 1299. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь:

$$\begin{array}{l} 1) 2x + 3y = 0 \text{ і } 4x - 5y = -22; \\ 2) 4x - 7y = 34 \text{ і } 2x + 7y = -4. \end{array}$$

1300. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{l} 1) \begin{cases} 3(y - x) - 4 = -7y, \\ 5(x + y) + 9 = 8x; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} \frac{x}{2} + y = 5, \\ x - \frac{y}{3} = 3. \end{cases} \end{array}$$

4 1301. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{2x - 1}{3} + \frac{y + 7}{2} = 5, \\ \frac{3x - 1}{5} + \frac{2y + 1}{3} = \frac{6x + 8y}{15}. \end{cases}$$

1302. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:

$$\begin{array}{l} 1) |x - y| + (x + 2y - 1)^2 = 0; \\ 2) |x + y - 6| + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0. \end{array}$$

До § 29

2 1303. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} 2x + y = 3, \\ 3x - y = 7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 5x + y = 6, \\ 5x + 9y = 14; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 9y = -7, \\ 3x - 7y = 13; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 4x - 5y = 2, \\ 7x + 15y = 51. \end{cases}$$

3 1304. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} 7x + 2y = 3, \\ 4x + 3y = -2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 7x + 12y = 53, \\ 5x - 18y = -2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x + 7y = -5, \\ 6x + 9y = -6; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5(a - 3b) + 6a = 7, \\ 0,5(a + 6b) - 1,5b = 2,5. \end{cases}$$

4 1305. З'ясуйте кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x + ay = 6 \end{cases} \text{ залежно від коефіцієнта } a.$$

До § 27–29

2 1306. Розв'яжіть систему рівнянь трьома способами (графічним, підстановки, додавання):

$$1) \begin{cases} x - 2y = 5, \\ x + y = -1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + y = 7, \\ -x + 3y = 0. \end{cases}$$

3 1307. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2 - 5x = 3(1 - y), \\ 2(x + y) = 0,5x + 5,5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4(x + 7) - 9(y - 13) = 139, \\ 5(x - 1) + 4(3 - y) = -15. \end{cases}$$

1308. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{4y}{5} = 2\frac{4}{15}, \\ \frac{3x}{7} + \frac{2y}{5} = -\frac{13}{35}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{y}{4} = \frac{23}{40}, \\ \frac{4x}{15} - \frac{3y}{5} = 1\frac{1}{30}. \end{cases}$$

4 **1309.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{x+2}{3} + \frac{y-5}{3} = 2, \\ \frac{x+2}{2} - \frac{y-5}{6} = \frac{5}{3}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{2x+1}{7} + \frac{2y+2}{5} = \frac{1}{5}, \\ \frac{3x-2}{2} + \frac{y+4}{4} = 4. \end{cases}$$

1310. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x + y = -2, \\ -6x - 3y = 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x - 6y = 7. \end{cases}$$

1311. Чи має розв'язок система рівнянь:

$$1) \begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ 7x + 5y = 2, \\ 3x + 2y = 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - 4y = 10, \\ 4x + 7y = 1, \\ 5x + 6y = 4? \end{cases}$$

1312. Графік функції $y = kx + l$ перетинає вісь x у точці з абсцисою 4, а вісь y – у точці з ординатою -5 .

1) Задайте функцію формулою.

2) З'ясуйте, чи проходить її графік через точку $(-80; -105)$.

1313. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3(x - 2y) + x(7 - 2y) = 2y(1 - x), \\ 4(x - y - 1) + 5(x + y - 1) = 32; \end{cases}$$
$$2) \begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = (x + 3)^2 + (y + 1)^2, \\ (y - 2)^2 - (y + 2)^2 = (x + 6)^2 - (x - 1)^2. \end{cases}$$

- 1314.** Для якого значення a система рівнянь
$$\begin{cases} 5x + 4y = 2, \\ 10x + 8y = a \end{cases}$$
- 1) має безліч розв'язків;
 - 2) не має розв'язків?
 - 3) Чи існує таке значення a , для якого система має єдиний розв'язок?

- 1315.** Для якого значення b система рівнянь
$$\begin{cases} 12x - 9y = 15, \\ 4x + by = 5 \end{cases}$$
- 1) має безліч розв'язків;
 - 2) має єдиний розв'язок? Знайдіть цей розв'язок.

До § 30

- 2** **1316.** За 3 год автобусом і 5 год поїздом туристка пододала 450 км. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість поїзда, якщо швидкість поїзда на 10 км/год більша за швидкість автобуса.
- 1317.** За 7 порцій млинців і 2 салати заплатили 468 грн. Скільки коштує одна порція млинців і скільки – один салат, якщо дві порції млинців на 27 грн дешевші за три салати?
- 3** **1318.** Теплохід за 3 год за течією і 2 год проти течії долає 142 км. Цей самий теплохід за 4 год проти течії долає на 14 км більше, ніж за 3 год за течією. Знайдіть власну швидкість теплохода і швидкість течії.
- 1319.** Майстер і його учень повинні були виготовити 114 деталей. Після того як учень пропрацював 2 год, до роботи приєднався майстер, і вони разом закінчили роботу за 3 год. Скільки деталей за годину виготовляв майстер і скільки учень, якщо майстер за 2 год виготовляє стільки само деталей, скільки учень за 3 год?

- 4** **1320.** Два ящики наповнено грушами. Якщо з другого ящика перекласти в перший 10 груш, то в обох ящиках груш стане порівну. Якщо з першого ящика перекласти в другий 44 груші, то груш у першому ящику залишиться в 4 рази менше, ніж у другому. Скільки груш у кожному ящику?
- 1321.** Різниця між половиною одного числа і 0,75 другого дорівнює 8. Якщо перше число зменшити на його сьому частину, а друге збільшити на його дев'яту частину, то їх сума становитиме 100. Знайдіть ці числа.
- 1322.** Сума трьох чисел, з яких друге в 5 разів більше за перше, дорівнює 140. Якщо друге число збільшити на 15 %, третє зменшити на 10 %, а перше число не змінювати, то сума цих чисел становитиме 139,5. Знайдіть ці числа.
- 1323.** Периметр прямокутника на 154 см більший за одну з його сторін і на 140 см більший за другу. Знайдіть площу прямокутника.
- 1324.** Сума цифр деякого двоцифрового числа дорівнює 8. Якщо його цифри поміняти місцями, то одержимо число, що на 18 більше за дане. Знайдіть це число.
- *** **1325.** У двох бідонах місткістю 20 л і 15 л уже є певна кількість молока. Якщо в більший бідон вщерть долити молока з меншого, то в меншому бідоні залишиться половина початкової кількості. Якщо в менший бідон долити вщерть молока з більшого, то в більшому залишиться $\frac{2}{3}$ від початкової кількості. По скільки літрів молока в кожному бідоні?



Головне в розділі 4

РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Лінійним рівнянням з двома змінними називають рівняння вигляду $ax + by = c$, де x і y – змінні. Числа a , b і c називають *коефіцієнтами* рівняння.

Розв'язком рівняння з двома змінними називають пару значень змінних, яка перетворює рівняння в правильну числову рівність.

Рівняння з двома змінними мають ті самі **властивості**, що й рівняння з однією змінною:

- 1) якщо в рівнянні розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
- 2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
- 3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

ГРАФІК ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Графіком рівняння з двома змінними x і y називають фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками цього рівняння.

Графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля, є пряма.

Щоб побудувати графік рівняння $y = m$, достатньо позначити на осі y точку $(0; m)$ та провести через неї пряму паралельно осі x .

Щоб побудувати графік рівняння $x = n$, достатньо позначити на осі x точку $(n; 0)$ та провести через неї пряму паралельно осі y .

СИСТЕМА ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, яка є розв'язком кожного з рівнянь системи.

Розв'язати систему рівнянь – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ПІДСТАНОВКИ

- 1) Виразити з якого-небудь рівняння системи одну змінну через другу.
- 2) Одержаний для цієї змінної вираз підставити в друге рівняння системи.
- 3) Розв'язати отримане рівняння з однією змінною, тобто знайти значення цієї змінної.
- 4) Знайти відповідне їй значення другої змінної.
- 5) Записати відповідь.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ДОДАВАННЯ

- 1) Помножити за потреби обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами.

- 2) Додати почленно рівняння системи.
- 3) Розв'язати отримане рівняння з однією змінною.
- 4) Підставити знайдене значення змінної в одне з рівнянь даної системи і знайти відповідне їй значення іншої змінної.
- 5) Записати відповідь.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

- 1) Позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x і y).
- 2) За умовою задачі скласти систему рівнянь.
- 3) Розв'язати одержану систему.
- 4) Проаналізувати знайдені значення змінних відповідно до умови задачі, дати відповідь на запитання задачі.
- 5) Записати відповідь.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

- 1** 1. Перевірте, чи є число 7 коренем рівняння:
1) $x - 2 = 5$; 2) $56 : x = 6$.
2. Виконайте дії:
1) $p^4 p^3$; 2) $t^9 : t^5$.
3. Чи проходить графік рівняння $x - y = 5$ через точку:
1) $M(6; 2)$; 2) $N(4; -1)$?
- 2** 4. Спростіть вираз:
1) $(x - 3)(x + 3) - x(x - 5)$;
2) $(a + 2)^2 + (a - 7)(a + 3)$.
5. Розкладіть на множники:
1) $14p^3 - 21p^2m$;
2) $3a^2 - 12b^2$.
6. Розв'яжіть рівняння $5(x - 3) - 3(x + 2) = 3 - x$.
- 3** 7. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 3x - 4$ і $y = 5$ та знайдіть координати точки їх перетину.
8. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ -4x + 3y = 16. \end{cases}$$
- 4** 9. З пункту A до пункту B вирушив пішохід. Через 1 год назустріч йому з пункту B виїхала велосипедистка. Відстань між пунктами A і B дорівнює 58 км, а швидкість велосипедистки на 10 км/год більша за швидкість пішохода. Знайдіть швидкість велосипедистки і швидкість пішохода, якщо вони зустрілися через 4 год після виходу пішохода.



ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Лінійні рівняння

1. Знайдіть усі цілі значення a , для яких корінь рівняння $(a + 2)x = 8$ є натуральним числом.
2. Перша цифра чотирицифрового числа дорівнює 7. Якщо цю цифру переставити на останнє місце, то одержимо число, менше від початкового на 1746. Знайдіть число.
3. Не розв'язуючи рівняння $5(2024x + 2025) = 13$, доведіть, що його корінь не є цілим числом.
4. Розв'яжіть рівняння:
1) $|x| + |x - 2| = 0$; 2) $|x - 3| + |6 - 2x| = 0$.
5. Скільки розв'язків залежно від числа a (кажуть: *параметра a*) має рівняння: 1) $ax = 2$; 2) $ax = 0$?
6. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння відносно змінної x :
1) $2x - a = 15$; 2) $7x - a = 2x + 4a - 9$;
3) $(a - 3)x = 7$; 4) $ax = a$;
5) $ax + 1 = x + a$; 6) $a(x - 2) = x(a + 3)$.
Розв'язання. 4) Якщо $a = 0$, то маємо рівняння $0 \cdot x = 0$, тоді x – будь-яке число. Якщо $a \neq 0$, то, поділивши ліву і праву частини рівняння на a , одержимо $x = 1$.
Відповідь: якщо $a = 0$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$.
7. Для якого значення параметра a є рівносильними рівняння: 1) $7x + a = 5(x - a)$ і $7(x + a) = 4(10 - a)$;
2) $(a + 7)x = 18$ і $|x| = -1$?
8. Поїзд проїжджає повз нерухому пасажирку за 7 с, а вздовж платформи завдовжки 378 м – за 25 с. Знайдіть швидкість і довжину поїзда.

9. Поїзд проїжджає по мосту, 171 м завдовжки, за 27 с, а повз пішохода, який рухається зі швидкістю 1 м/с назустріч поїзду, – за 9 с. Знайдіть швидкість поїзда та його довжину.
10. Через першу трубу басейн заповнюється водою за половину того часу, за який друга труба заповнить $\frac{2}{3}$ цього басейну. Через другу трубу окремо басейн заповнюється на 4 год довше, ніж через першу трубу. За який час заповнює басейн кожна труба окремо?
11. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них становить 25 % від другого.
12. Для ремонту двох кімнат придбали шпалери. На ремонт першої кімнати використали на 2 рулони більше, ніж половина придбаного, а на ремонт другої кімнати – $\frac{2}{3}$ від кількості рулонів, що використали на ремонт першої кімнати. Скільки рулонів шпалер було придбано, якщо після ремонту обох кімнат залишився невикористаним один рулон?
13. Сплав міді й цинку містить на 320 г більше міді, ніж цинку. Після того як від сплаву відокремили $\frac{6}{7}$ тієї маси міді та 60 % тієї маси цинку, що в ньому містилися, маса сплаву стала дорівнювати 100 г. Якою була початкова маса сплаву?

Цілі вирази

14. Рівність $(I + V + A + H)^4 = IVАН$ є правильною. Знайдіть число IVАН, якщо різним буквам відповідають різні цифри.

15. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на 15 %, а ширину – на 20 %?

16. Що більше: $\frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$ чи $\frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$?

17. Доведіть, що число $2017 \cdot 2019 + 1$ є квадратом деякого натурального числа. Якого саме?

18. Доведіть, що значення виразу $8n^3 - 8n$ для будь-якого натурального значення $n > 1$ кратне числу 24.

19. Подайте вираз $2m^2 + 2n^2$ у вигляді суми двох квадратів.

20. Який многочлен потрібно записати замість «зірочки», щоб одержати тотожність:

1) $(x + 1) \cdot * = x^2 - 4x - 5$;

2) $(x^2 - x + 1) \cdot * = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$?

21. Розкладіть на множники:

1) $a^2b^2 - 2ab^2 + b^2 + a^4 - 2a^2 + 1$; 2) $1 - 3t + 3t^2 - t^3$;

3) $x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 4$; 4) $2(m + 3n) + (m - n)(m + n) - 8$;

5) $a^3 + a^2 - b^3 - b^2$; 6) $8x^3 + 4x^2 - 2$.

22. Чи може сума квадратів п'яти послідовних натуральних чисел бути квадратом натурального числа?

23. Спростіть вираз:

$$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1).$$

24. Число b є середнім арифметичним чисел a і c . Доведіть, що $a^2 + ac + c^2$ є середнім арифметичним чисел $a^2 + ab + b^2$ і $b^2 + bc + c^2$.

25. *Задача Лагранжа.* Доведіть тотожність

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)(m^2 + n^2 + p^2) - (xm + yn + zp)^2 = \\ = (xn - ym)^2 + (xp - zm)^2 + (yp - zn)^2. \end{aligned}$$

26. Доведіть, що число \overline{abcabc} є кратним числам 7, 11 і 13.
27. Доведіть, що значення виразу $555^{777} + 777^{555}$ є кратним числу 37.
28. Яке трицифрове число є і квадратом двоцифрового числа, і кубом одноцифрового числа?
29. Доведіть, що значення виразу $191^6 + 734^6 - 593^3$ ділиться на 10.
30. Доведіть, що значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ для будь-якого натурального значення n є кратним числу 10.
31. Подайте вираз $2x(x^2 + 3y^2)$ у вигляді суми кубів двох многочленів.
32. Доведіть тотожність:
 1) $(x - 2)(x - 1)x(x + 1) + 1 = (x^2 - x - 1)^2$;
 2) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.
33. Використовуючи результат попередньої задачі, доведіть, що число $2017 \cdot 2018 \cdot 2019 \cdot 2020 + 1$ є квадратом деякого натурального числа u . Знайдіть u .
34. Доведіть, що різниця кубів двох послідовних натуральних парних чисел при діленні на 48 дає в остачі 8.
35. Розкладіть на множники:
 1) $y^5 + y + 1$;
 2) $m^4 + m^2 + 1$;
 3) $x^4 + 5x^2 + 9$;
 4) $n^4 + 4$;
 5) $x^4 + 2a^2x^2 - 4a^2b^2 - 4b^4$;
 6) $m^3 - 2m - 1$;
 7) $m^3 - 5m - 2$;
 8) $x^4 - 2x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4$.
36. Порівняйте 5^{15} і 3^{23} .

Функції

37. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2|x| + x$;

2) $y = |x| - 3x$;

3) $y = |2x| + 2x - 1$;

4) $y = 2x - |3x| + 3$.

38. Точка $A(a; b)$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, належить графіку функції $y = x^2$. Чи належить цьому графіку точка:

1) $B(-a; b)$;

2) $C(a; -b)$;

3) $D(-a; -b)$?

39. Точка $M(m; n)$, де $m \neq 0$, $n \neq 0$, належить графіку функції $y = x^3$. Чи належить цьому графіку точка:

1) $N(-m; n)$;

2) $K(m; -n)$;

3) $P(-m; -n)$?

40. Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = -4|x| + 3$ та

$$y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{якщо } x \leq 0, \\ -3x + 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Системи лінійних рівнянь

41. Оля може придбати без решти 7 рогаликів і 3 вертути або 3 рогалики і 4 вертути. Який відсоток становить ціна рогалика від ціни вертути?

42. Чи має розв'язки рівняння з двома змінними:

1) $x^2 + y^4 = -1$;

2) $|y| + x^2 = 0$;

3) $x^2 - |y| = 5$;

4) $5x^2 + y^8 + |x| = 0$?

43. У рівнянні $ax + by = 43$ коефіцієнти a і b – цілі числа. Чи може розв'язком цього рівняння бути пара чисел $(5; 10)$?

44. Скільки розв'язків має рівняння:

1) $(x + 1)^2 + y^2 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + (y - 2)^2 = 0$;

3) $|x| + (y + 1)^2 = 0$;

4) $x((x - 3)^2 + (y + 4)^2) = 0$?

45. Сергій придбав кілька зошитів по 10 грн і кілька ручок по 12 грн 50 к., заплативши за всю покупку 150 грн. Скільки зошитів придбав Сергій?

46. Побудуйте графік рівняння:

1) $(x + 1)(x - 2y) = 0$;

2) $x^2 - xy = 0$;

3) $(x^2 - 4)(y^2 + 4) = 0$;

4) $(|x| + 1)(|y| - 3) = 0$;

5) $|x| + x = y$;

6) $x = y|x|$.

47. Доведіть, що рівняння $x^2 - y^2 = 26$ не має розв'язків у цілих числах (тобто розв'язками не можуть бути цілі числа).

48. Чи перетинає графік рівняння $y + x^2 = 4$ вісь x ; вісь y ? Якщо так, то вкажіть координати точок перетину.

49. Знайдіть усі пари натуральних чисел, що задовольняють рівняння $11x + 8y = 104$.

50. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіка рівняння $(x - 3)(y + 5) = 0$:

1) з віссю x ;

2) з віссю y .

51. Яна загадала два двоцифрових числа, кожне з яких починається цифрою 6, причому інші цифри кожного із чисел відмінні від числа 6. Якщо переставити місцями цифри в кожному із загаданих чисел, то значення їх добутку не зміниться. Які числа загадала Яна?

52. Олесь народився у ХХ столітті. У 2009 році йому було стільки років, якою є сума цифр його року народження. У якому році народився Олесь?

53. За якого значення a прямі $3x + 4y = 5$ і $2x + 8y = a$ перетинаються в точці, що лежить на осі y ?

54. Доберіть, якщо це можливо, таке значення m , для якого система рівнянь має єдиний розв'язок; не має розв'язків; має безліч розв'язків:

1)
$$\begin{cases} 2x - y = 7, \\ mx - y = 5; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 1,5x + y = m; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} mx - 2y = 1, \\ 4x - 8y = 4. \end{cases}$$

55. Для якого значення a система рівнянь
$$\begin{cases} 4x - 3y = 10, \\ 2x + 5y = -8, \\ a(x + y) = 7 \end{cases}$$
 має розв'язок?

56. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = 2, \\ y - z = 3, \\ z + x = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = 7, \\ y + z = 5, \\ z + x = -4. \end{cases}$$

57. У результаті множення многочлена $4x^3 - 2x^2 + 3x - 8$ на многочлен $ax^2 + bx + 1$ одержали многочлен, який не містить ані x^4 , ані x^3 . Знайдіть коефіцієнти a і b та многочлен, який одержали в добутку.

58. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} (x - 1)(y - 4x) = 0, \\ x + y = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (x - y)(x + 1) = 0, \\ (y - 2)(x + y - 6) = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. 4) Перше рівняння системи перепишемо так: $x^2 + 2xy + y^2 = 1$, тобто $(x + y)^2 = 1$. Звідки $x + y = 1$ або $x + y = -1$. Отже, розв'язування початкової системи рівнянь звелось до розв'язування двох систем:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x - y = 3 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x + y = -1, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Звідки $x = 1; y = 0$ та $x = 0,5; y = -1,5$.

Відповідь: $(1; 0); (0,5; -1,5)$.

59. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:

$$1) (x - 2)^2 + (3x - y)^2 = 0; \quad 2) (2x - y)^2 + x^2 + 8x + 16 = 0;$$

3) $(7x + y - 3)^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 0$;

4) $|x - y + 5| + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;

5) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$;

6) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0$.

- 60.** Число b на 10 % більше за число a і на 30 % більше за число c . Знайдіть числа a , b і c , якщо a на 8 більше за c .
- 61.** Через 4 роки відношення віку брата до віку сестри дорівнюватиме 7 : 5. Скільки років нині кожному з них, якщо 2 роки тому брат був удвічі старший за сестру?
- 62.** Загадали деяке двоцифрове число. Якщо це число поділити на суму його цифр, то одержимо неповну частку, що дорівнює 4 та 6 в остачі. Якщо ж від цього числа відняти потроєну суму його цифр, то одержимо 16. Яке число загадали?
- 63.** Кількість десятків деякого трицифрового числа вдвічі більша за кількість одиниць. Сума цифр цього числа дорівнює 13. Якщо поміняти місцями цифри сотень і одиниць, то одержимо число, яке на 495 менше від даного. Знайдіть це число.
- 64.** Якщо перше з двох даних чисел збільшити на 10 %, а друге – на 15 %, то їх сума збільшиться на 13 %. Якщо перше з даних чисел зменшити на 5 %, а друге – на 10 %, то сума чисел зменшиться на 48. Знайдіть ці числа.
- 65.** Для проведення ремонту придбали пісок і цемент. Першого дня використали $\frac{1}{5}$ від маси придбаного піску і $\frac{1}{4}$ від маси придбаного цементу, що разом становило 205 кг. Другого дня використали чверть тієї маси піску, яка залишилася, що на 37 кг більше за масу п'ятої частини цементу, яка залишилася після першого дня. Скільки піску і скільки цементу було придбано для ремонту?

66. Одна сторона трикутника утричі більша за другу. Периметр трикутника на 22 см більший за їх півсуму і на 27 см більший за їх піврізницю. Знайдіть сторони трикутника.
67. Якщо довжину прямокутника збільшити на 3 см, а ширину – на 2 см, то його площа збільшиться на 37 см^2 . Якщо кожен сторону прямокутника зменшити на 1 см, то його площа зменшиться на 12 см^2 . Знайдіть периметр прямокутника.
68. Зливоч складається з двох металів, маси яких відносяться як 3 : 4. Інший зливоч містить ті самі метали, але у відношенні 1 : 2. По скільки кілограмів від кожного зливка потрібно взяти, щоб одержати зливоч масою 10 кг, у якому маси тих самих металів відносяться як 2 : 3?
69. Дорога від села до міста спочатку пролягає горизонтально, а потім угору. Турист проїхав на велосипеді горизонтальну її частину зі швидкістю 10 км/год, а вгору йшов пішки зі швидкістю 3 км/год і прибув до міста через 1 год 40 хв після виїзду із села. У зворотному напрямку шлях униз турист проїхав зі швидкістю 15 км/год, а горизонтальну ділянку – зі швидкістю 12 км/год і прибув до села через 58 хв після виїзду з міста. Знайдіть відстань між містом і селом.
70. В одному резервуарі – 490 л води, а в другому – 560 л. Якщо перший резервуар ущерть долити водою з другого, то другий стане заповнений наполовину. Якщо другий резервуар ущерть долити з першого, то перший буде заповнений тільки на третину. Визначте місткість кожного з резервуарів.
71. Автобус і маршрутне таксі, які за розкладом вирушають назустріч одне одному о 8 год з пунктів *A* і *B*, зазвичай

зустрічаються о 8 год 12 хв. Але одного разу маршрутне таксі вирушило в рейс о 8 год 8 хв і зустрілося з автобусом о 8 год 17 хв. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість маршрутного таксі, якщо відстань між A і B дорівнює 24 км.

- 72.** З пункту M до пункту N о 7 год і о 7 год 30 хв виїхали два автобуси з однаковою швидкістю. О 7 год 10 хв з пункту N до пункту M виїхала велосипедистка. Вона зустріла перший автобус о 7 год 40 хв, а другий – о 8 год 01 хв. Знайдіть швидкості велосипедистки та кожного з автобусів, якщо відстань між пунктами M і N дорівнює 37 км.
- 73.** З міста в село, відстань між якими 24 км, вирушив турист. Через 1 год 20 хв услід за ним виїхав велосипедист, який через пів години наздогнав туриста. Після прибуття в село велосипедист, не зупиняючись, повернув назад і зустрівся з туристом через півтори години після першої зустрічі. Знайдіть швидкість туриста і швидкість велосипедиста.
- 74.** З міста A в місто B о 9 год виїхали два автобуси. У той самий час з міста B в місто A виїхала велосипедистка. Один автобус трапився на її шляху о 10 год 20 хв, а другий – об 11 год. Знайдіть швидкості велосипедистки та кожного з автобусів, якщо швидкість одного автобуса становить $\frac{7}{12}$ від швидкості другого, а відстань між містами – 120 км.
- 75.** По колу, довжина якого 500 м, рухаються дві точки. Вони зустрічаються через кожні 10 с, якщо рухаються у протилежних напрямках, і через кожні 50 с, якщо – в одному. Знайдіть швидкість кожної з точок.

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

§ 18

- 759.** 1) -3 ; 2) 16 . **760.** 1) -2 ; 2) 27 . **770.** 1) 2 ; 2) 1 ; 3) $-\frac{8}{43}$.
771. 1) $-1,6$; 2) -6 ; 3) $\frac{2}{3}$. **772.** 1) $6a + 18$; 2) $55x^2 + 48xy - 73y^2$;
3) $b^4 - 18b^2 + 81$; 4) $625 - 50a^2 + a^4$. **773.** 1) $13 - 4c$; 2) $56x^2 +$
 $+ 20xy - 8y^2$; 3) $a^4 - 72a^2 + 1296$; 4) $16 - 8m^2 + m^4$. **775.** 1) $x^2 +$
 $+ 2xy + y^2 - 1$; 2) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$; 3) $m^2 + 2mn + n^2 - 4p^2$;
4) $x^2 - y^2 - 4y - 4$. **776.** $9\frac{5}{6}$. **777.** 120 м^2 ; 8 год .

§ 19

- 798.** 1) -4 ; 6 ; 2) -6 ; 1 ; 3) $-2,2$; 1 ; 4) -1 ; 11 . **799.** 1) -8 ; 4 ; 2) -1 ; $2,6$;
3) -7 ; 0 ; 4) 1 ; 4 . **801.** 1) $(6a^3 - b)(b - 4a^3)$; 2) $8p(2p - 3m^2)$; 3) $(5x + 9y) \times$
 $\times (9x - 5y)$; 4) $4c(a + b)$; 5) $(a^2 + a - c^4)(a^2 + a + c^4)$; 6) $4b(1 - 5a)$.
802. 1) $3(a^2 - 3b)(3a^2 - b)$; 2) $3(m^4 - c)(3c - m^4)$; 3) $4(4b - a)(3a - b)$;
4) $4t(x - y)$. **803.** 1) 2 ; $1,5$; 2) -3 ; 3 ; 3) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 4) немає коренів.
807. Швидкість корабля більша за швидкість велосипедиста.
810. Порада. Використати зважену крупу як гирку.

§ 20

- 825.** 1) $5a + 8$; 2) $9b - 27$; 3) 65 ; 4) $4b^6 - 4b^3 - 2$. **826.** 1) $4a - 64$; 2) 35 ;
3) $125 + b - 2b^2$; 4) $a^6 - 1$. **827.** 1) -7 ; 2) $-0,1$. **828.** 1) 8 ; 2) $-0,2$; 3) $0,5$;
4) -2 . **829.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 2 . **830.** 1) $9(a^2 + 3a + 3)$; 2) $(x - 2)(x^2 - 10x + 28)$;
3) $(2p - 1)(13p^2 + 5p + 1)$; 4) $(5x - 1)(13x^2 + 2x + 1)$. **831.** 1) $(2a + 1) \times$
 $\times (a^2 + a + 1)$; 2) $(b - 4)(b^2 - 2b + 4)$; 3) $(4b + 1)(31b^2 - 7b + 1)$;
4) $(5a + 2)(13a^2 - 4a + 4)$. **833.** Так. **836.** 50 зошитів і 10 зошитів.
837. 132 грн . **839.** 7 курей.

§ 21

- 855.** 1) $(a - 3)(a + 3)(a^2 + 9)$; 2) $(2 - c)(2 + c)(4 + c^2)$; 3) $(x - 1)(x + 1) \times$
 $\times (x^2 + 1)(x^4 + 1)$; 4) $(a - b^2)(a + b^2)(a^2 + b^4)$. **857.** 1) 0 ; -1 ; 1 ; 2) 0 ; -4 ; 4 ;

3) 0; 4) 0; -2. **858.** 1) 0; -1; 1; 2) 0; -6; 6; 3) 0; 4) 0; 1. **859.** 1) $7(a - 1) \times (b + 3)$; 2) $6(m - 2)(n - 5)$; 3) $-a(b + 3)(c + 4)$; 4) $a(a + 1)(a - b)$. **860.** 1) $3(15 - b)(2 - a)$; 2) $-3(n + 3)(m + 6)$; 3) $a^3(a + 1)(x + 1)$; 4) $ap(p^2 + 1)(a - 3)$. **861.** 1) $(a + b - 4)(a + b + 4)$; 2) $(a - x - y)(a + x + y)$; 3) $(p + 5 - x)(p + 5 + x)$; 4) $(p - x + 10)(p + x - 10)$. **862.** 1) $(x + y - 5) \times (x + y + 5)$; 2) $(m - a + b)(m + a - b)$; 3) $(m - 4 - a)(m - 4 + a)$; 4) $(m - b - 4)(m + b + 4)$. **863.** 1) $(a - 9)(a + 10)$; 2) $(a + m)(m - a - 1)$; 3) $(x - y)(x + y - 1)$; 4) $(x - y)(x + y + 1)$; 5) $(a - 3b)(1 + a + 3b)$; 6) $(4m + 5n)(4m - 5n - 1)$. **864.** 1) $(a - b)(a + b - 1)$; 2) $(p + b)(p - b - 1)$; 3) $(4x - 5y)(4x + 5y + 1)$; 4) $(10m - 9n)(10m + 9n - 1)$. **865.** 1) $(m - 3) \times (p - 1)^2$; 2) $(1 - a)(1 + a)(1 - 2b)^2$. **867.** 1) $(a - b)(b - 1)(b + 1)$; 2) $(x - a) \times (x + a)(a + 7)$; 3) $(p + q)(p - 2)(p + 2)$; 4) $(a + 5)(a - m)(a + m)$. **868.** 1) $(m + n)(m^2 - mn + n^2 + 1)$; 2) $(a - b)(1 - a^2 - ab - b^2)$; 3) $(a + 2) \times (a^2 - 3a + 4)$; 4) $(2p - 1)^3$. **869.** 1) $(m + n)(m - 1)(m + 1)$; 2) $(b - 3) \times (a - 2)(a + 2)$; 3) $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1)$; 4) $(x + 1)(x^2 - x - 4)$. **870.** 1) 5; 1; -1; 2) 2; -2. **871.** 1) 1; -1; 2) 1; 3; -3. **872.** 1) $4(2a + b)(a + 2b)$; 2) $-(3y + 22m)(33y + 2m)$. **873.** 1) $(a^2 - 2ab + 4b^2)(a + 2b + 1)$; 2) $(m - 2n)(m^2 + 2mn + 4n^2 + m - 2n)$. **874.** 1) $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + a - b)$; 2) $(c + d - x - y)(c + d + x + y)$. **875.** 1) $(x + 1)(x - 3)$; 2) $(x - 1)(x + 9)$; 3) $(x + 1)(x - 4)$. **878.** -16. **879.** 8 год. **880.** Прибуток 2100 грн. **881.** Через 6 хв.

Вправи для повторення розділу 2

885. 1) 5; 2) 17; 3) -6; 4) -1,2; 5) 11; 6) 2,4. **890.** 1), 4) Ні; 2), 3) так. **894.** 1) 5; 2) 1; 3) 6; 4) 2. **895.** 1) Так; 2) ні. **899.** 1) a^{25-3n} ; 2) a^{5n+3} . **900.** 1) 6; 2) 7. **906.** 1) $3m^2n$; 2) $-7p$. **908.** 1), 3), 4) Так; 2) ні. **909.** 3. **912.** a^3b ; -5. **913.** Ні. **918.** $2xy + 7xy^2$; -69. **922.** $x = 2$. **923.** $x^3 - \frac{5}{8}x^2$. **924.** 24 ц; 21 ц; 20 ц. **925.** 2. **929.** 1) 5; 3; 2) 2; 7; -7. **930.** 1) -2; 2) -12; 3) 28; 4) 8. **934.** 1) -1; 2) 8. **937.** 50 см; 40 см. **940.** 1) $(3c - 2y) \times (4x^2 - 3y^3)$; 2) $(0,8m - 0,5n)(2n^2 - 3p^2)$. **941.** 1; -6. **945.** 25. **946.** Так. **947.** 1) $x^2 + 2xy + y^2 + 2xa + 2ya + a^2$; 2) $b^2 - 2bc + c^2 - 2bd + 2cd + d^2$; 3) $m^2 + 2mn + n^2 + 4m + 4n + 4$; 4) $a^2 + 6a + 9 - 2ac - 6c + c^2$. **951.** 1) $\frac{1}{3}$.

Порада. Помножити обидві частини рівняння на 3; 2) $-\frac{1}{5}$. **953.** 2) *Порада.* Вираз тотожно дорівнює виразу $(a - 2 + m)^2$. 3) *Порада.* Вираз тотожно дорівнює виразу $(a + b + 4)^2$. **958.** 1. **961.** 1) $-\frac{b}{a}$; $\frac{b}{a}$; 2) $0,3a$; $-0,3a$; **962.** 1) Так; 2) так. **963.** 1) $(5 - 4x)(5 + 4x)$; 2) $(3x - 5)(3x + 5)$. *Порада.* Спочатку спростіть вирази. **970.** 1) $9(a - b)(a^2 + ab + b^2)$; 2) $2(n + 3)(m - b)$; 3) $\left(\frac{1}{3}p - 1\right)\left(\frac{1}{3}p + 1\right)\left(\frac{1}{9}p^2 + 1\right)$; 4) $(m - 2n - 5) \times (m - 2n + 5)$; 5) $(b - 6)(b + 7)$; 6) $(m - n)(m - 2)(m + 2)$. **971.** 1) $m^2(a - 1) \times (m - 1)(m + 1)$; 2) $a(b - 1)(a - 1)(a + 1)$; 3) $(b + 1)(b - 1)^2$; 4) $(x - 3) \times (x^3 + 4x^2 + 3x + 9)$.

Розділ 3

§ 22

1003. 1) 0,6; 2) 2. **1004.** 1) Якщо $x = -5$, то $y = -23$; якщо $x = 0$, то $y = 0$; якщо $x = 3$, то $y = -6$; 2) якщо $x = -5$ або $x = 0$, то $y = 7$; якщо $x = 3$, то $y = 9$. **1005.** 1) Якщо $x = -2$, то $y = -16$; якщо $x = 0$, то $y = -2$; якщо $x = 4$, то $y = -12$; 2) якщо $x = -2$ або $x = 0$, то $y = 3$; якщо $x = 4$, то $y = -16$. **1006.** 4. **1007.** 0. **1009.** 10 см.

§ 23

1016. 1) 0; 2) 2; 3) 0; 4) 5. **1017.** 1) 0; 2) 3; 3) 0; 4) -2 . **1022.** 1), 4) Так; 2), 3) ні. **1023.** 1), 3) Так; 2), 4) ні. **1026.** 1) 0; 4) -4 ; 4) 3) -5 ; 0. **1027.** 1) 0; -2 ; 2) -5 ; 5) 3) 0; 4. **1030.** Ні. **1031.** 1) 2 кг; 2) 6 кг; 3) 1 кг; 4) 6 л. **1034.** 1) 450 л.

§ 24

1065. $k = -1,5$. **1066.** $l = -3$. **1067.** 1) $(0; -20)$; $\left(13\frac{1}{3}; 0\right)$; 2) $(0; 5)$; $(20; 0)$. **1068.** 1) $(0; -40)$; $(200; 0)$; 2) $(0; 18)$; $(54; 0)$. **1069.** $y = 100x$. **1070.** $y = -9x$. **1074.** $k = 0$; $l = 5$. **1075.** $k = 0$; $l = -5$. **1076.** l : $y = -3x$;

II: $y = x + 3$; III: $y = 3x$. **1077.** $-5 \leq y \leq 9$. **1078.** 1) (2; 2);
2) (1,2; -1,2); 3) (3; 6). **1083.** 1) 0; 2) -1. **1084.** 1) $16m^2 - 3\frac{3}{4}$;
2) $25y^2 + 4ay$. **1085.** 13 зошитів. **1087.** 1) 16 %; 2) 18 %.

Вправи для повторення розділу 3

1099. $k = -3$; $l = 10$.

Розділ 4

§ 25

1120. $p = 3$. **1121.** $n = 3$. **1122.** 1) $m = -35$; 2) $m = 15$.
1123. 1) $d = 19$; 2) $d = -2$. **1125.** (5; 5). **1126.** 1) $p = 2$; 2) $p = 21$.
1127. 1) Таких пар натуральних чисел немає; 2) (1; 1); 3) (8; 1),
(1; 2); 4) (1; 7), (7; 1). **1130.** 1) 6; 2) 13. *Порада.* $a^2 + b^2 =$
 $= (a + b)^2 - 2ab$; 3) 25; 4) -19. **1131.** 8400 грн.

§ 26

1149. 1) $m = 0$; 2) $m = 10$; 3) $m = -25$. **1150.** 1) (0; -3), (-21; 0);
2) (0; -5), (3; 0). **1151.** 1) (0; 18), (6; 0); 2) (0; -14), (-4; 0).
1155. Графіки не перетинаються. **1159.** 80 км/год; 60 км/год.
1160. 1) $\approx 4\%$; 2) $\approx 9\%$. **1162.** *Порада.* Розгляньте три випадки:
1) $x \leq 0$; 2) $0 < x < 1$; 3) $x \geq 1$.

§ 27

1173. $a = -8,5$; $b = -0,2$. **1174.** $a = 0,7$; $b = 10,5$. **1175.** 1) (2; 3);
2) (-1; 2); **1176.** 1) (1; 4); 2) (3; -2). **1184.** (x ; $1,5x - 2,5$), де x – будь-яке
число; 2) немає розв'язків. **1189.** *Порада.* Виділити повний квадрат.
1190. $P = 30 + 6s$. **1192.** 1.

§ 28

1200. (3; 1). **1201.** (4; 1). **1202.** 1) (4; -3); 2) (2; -5); 3) $a = -5$; $b = -2$;
4) $m = 4$; $n = 0,5$. **1203.** 1) (-3; 4); 2) (2; -7); 3) $p = 7$; $q = 3$; 4) $a = 1,5$;
 $b = -6$. **1204.** 1) (8,5; 2,5); 2) $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **1205.** 1) (1,5; 2,5); 2) $\left(\frac{1}{6}; -1\frac{1}{6}\right)$.

1206. 1) (46,5; -25,5); 2) (6,5; 2). **1207.** 1) (22,5; 7,5); 2) (45; 1).
1208. (4; 1). **1209.** (2; -3). **1211.** $k = \frac{1}{3}$; $l = -2$. **1212.** $y = 2,5x + 1$.
1213. 1) $m = 2$; 2) $m = 4$.

§ 29

1231. 1) (-1; 1); 2) $a = 2$; $b = -1$; 3) $m = 3$; $n = 2$; 4) $\left(-\frac{1}{7}; \frac{1}{2}\right)$.
1232. 1) (2; 1); 2) (0,4; 7). **1233.** 1) (1; -2); 2) $a = 0,4$; $b = 0,1$.
1234. 1) (-2; 2); 2) $m = 0,8$; $n = -1,5$. **1235.** 1) $y = \frac{3}{8}x - 5,5$;
 2) $y = -\frac{2}{3}x + 4$. **1236.** $y = -0,25x + 4$. **1237.** 1) (-1; 3); 2) (3; -2).
1238. 1) (1; -2); 2) (-2; -8). **1239.** 1) Розв'язків немає; 2) безліч розв'язків.
1244. Ні, оскільки при цілих числах x і y значення виразу $y^2 - x^2$ є непарним або кратним числу 4.

§ 30

1250. 10 зошитів; 6 зошитів. **1251.** 224 грн, 208 грн. **1252.** 84 грн, 28 грн. **1253.** 10 см, 8 см, 8 см. **1254.** 18 м; 10 м. **1255.** 18 км/год; 2 км/год. **1256.** 17 км/год; 3 км/год. **1257.** 42 км/год; 14 км/год. **1258.** 24 і 38. **1259.** 32 і 40. **1260.** 32 роки; 10 років. **1263.** 80 яблук; 15 яблук. **1264.** 25; 20. **1265.** 90; 110. **1266.** 12 кг; 8 кг. **1267.** 10 кг; 15 кг. **1268.** 30 л; 45 л. **1269.** 24 книжки; 33 книжки. **1270.** 96 грн, 104 грн. **1271.** 180 тортів; 120 тортів. **1272.** $\frac{5}{18}$. **1273.** $\frac{7}{10}$. **1274.** 50 г; 150 г. **1275.** 156 г; 104 г. **1276.** 36 років; 8 років. **1277.** 45. **1282.** 20 корів.

Вправи для повторення розділу 4

1288. (-2; 0); (-1; 1); (-1; -1); (0; 2); (0; -2); (1; 1); (1; -1); (2; 0).
1297. 1) $a = 3$; 2) $a \neq -14$. **1299.** 1) (-3; 2); 2) (5; -2). **1300.** 1) $\left(7\frac{1}{3}; 2\frac{3}{5}\right)$;
 2) (4; 3). **1301.** (-28; 41). **1302.** 1) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; 2) (4; 2). **1305.** Якщо $a = 2$,

то безліч розв'язків; якщо $a \neq 2$, то єдиний розв'язок. **1307.** 1) (1; 2); 2) (-6; -2). **1308.** 1) (1; -2); 2) (0,5; -1,5). **1309.** 1) (2; 7); 2) $\left(3\frac{7}{37}; -3\frac{5}{37}\right)$. **1310.** 1) $(x; -2 - 2x)$, де x – будь-яке число; 2) система не має розв'язків. **1311.** 1) Ні; 2) так; (2; -1) – розв'язок системи. **1312.** 1) $y = 1,25x - 5$. **1313.** 1) (4; 5); 2) (-2,5; 0). **1314.** 1) $a = 4$; 2) $a \neq 4$; 3) не існує. **1315.** 1) $b = -3$; 2) якщо $b \neq -3$, то $x = 1,25$; $y = 0$. **1316.** 50 км/год; 60 км/год. **1317.** Порція млинців – 54 грн, салат – 45 грн. **1318.** 28 км/год; 2 км/год. **1319.** 18 деталей за годину виготовляє майстер і 12 – учень. **1320.** 80 груш; 100 груш. **1321.** 70 і 36. **1322.** 10; 50 і 80. **1323.** 2352 см². **1324.** 35. **1325.** 15 л і 10 л. *Порада.* Позначити x л – у першому бідоні, y л – у другому. Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 20, \\ y + \frac{1}{3}x = 15. \end{cases}$$

Задачі підвищеної складності

1. -1; 0; 2; 6. **2.** 7583. *Порада.* Позначити шукане число $\overline{7abc}$, після чого $\overline{abc} = x$. **4.** 1) Рівняння не має розв'язків; 2) $x = 3$. **5.** 1) Якщо $a = 0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв'язок; 2) якщо $a = 0$, то рівняння має безліч розв'язків; якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв'язок. **6.** 1) Для всіх a : $x = \frac{15 + a}{2}$; 2) для всіх a : $x = \frac{5a - 9}{5}$; 3) якщо $a = 3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 3$, то $x = \frac{7}{a - 3}$; 5) якщо $a = 1$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 1$, то $x = 1$; 6) для всіх значень a : $x = -\frac{2a}{3}$. **7.** 1) $a = -4$; 2) $a = -7$. **8.** 21 м/с; 147 м. *Порада.* Позначивши x м/с – швидкість поїзда, матимемо рівняння $25x = 378 + 7x$. **9.** 10 м/с; 99 м. *Порада.* Нехай x м/с – швидкість поїзда, тоді його довжина $9x + 9$. Одержимо рівняння $27x = (9x + 9) + 171$. **10.** 2 год; 6 год. **11.** 30°, 30° і 120°

або 20° , 80° і 80° . **12.** 26 рулонів. **13.** 520 г. **14.** 2401. **15.** На 38 %.

16. $\frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$. **17.** 2018^2 . **19.** $(m + n)^2 + (m - n)^2$. **20.** 1) $x - 5$; 2) $x + 3$.

21. 1) $(a - 1)^2(b^2 + a^2 + 2a + 1)$; 2) $(1 - t)^3$; 3) $(x - 1)(x + 1)(x^4 - 2x^2 + 4)$.

Порада. $x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 4 = (x^6 + 8) - 3(x^4 - 2x^2 + 4)$; 4) $(m - n + 4) \times$

$\times (m + n - 2)$. *Порада.* $2(m + 3n) + (m - n)(m + n) - 8 = (m^2 + 2m + 1) -$

$-(n^2 - 6n + 9)$; 5) $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + a + b)$; 6) $2(2x - 1)(2x^2 + 2x + 1)$.

Порада. $8x^3 + 4x^2 - 2 = (8x^3 - 1) + (4x^2 - 1)$. **22.** Ні. **23.** $2^{128} - 1$. **24.** По-

рада. Розглянути вираз $\frac{(a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2)}{2}$ та використати, що

$b = \frac{a + c}{2}$. **26.** *Порада.* $\overline{abcabc} = 100\,000a + 10\,000b + 1000c + 100a +$

$+ 10b + c = 100\,100a + 10\,010b + 1001c = 1001(100a + 10b + c) = 1001\overline{abc}$.

28. 729. **30.** *Порада.* Довести, що $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 10(3^n - 2^{n-1})$.

31. $(x + y)^3 + (x - y)^3$. **33.** $y = 4\,074\,341$. **34.** *Порада.* $(2n + 2)^3 -$

$-(2n)^3 = 24n(n + 1) + 8$. **35.** 1) $(y^2 + y + 1)(y^3 - y^2 + 1)$. *Порада.* $y^5 + y +$

$+ 1 = y^5 - y^2 + y^2 + y + 1 = y^2(y^3 - 1) + y^2 + y + 1$; 2) $(m^2 + m + 1)(m^2 - m + 1)$.

Порада. $m^4 + m^2 + 1 = m^4 - m + m^2 + m + 1$; 3) $(x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3)$.

Порада. $x^4 + 5x^2 + 9 = (x^4 + 6x^2 + 9) - x^2$; 4) $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.

Порада. $n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2$; 5) $(x^2 - 2b^2)(x^2 + 2a^2 + 2b^2)$. По-

рада. $x^4 + 2a^2x^2 - 4a^2b^2 - 4b^4 = (x^4 + 2a^2x^2 + a^4) - (a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4)$;

6) $(m + 1)(m^2 - m - 1)$. *Порада.* $m^3 - 2m - 1 = (m^3 + m^2) - (m^2 + 2m + 1)$;

7) $(m + 2)(m^2 - 2m - 1)$. *Порада.* $m^3 - 5m - 2 = (m^3 + 8) - (5m + 10)$

або $m^3 - 5m - 2 = (m^3 - 4m) - (m + 2)$; 8) $(x + y)(x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3)$.

Порада. $x^4 - 2x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4 = (x^4 - y^4) - (2x^3y + 2x^2y^2) -$

$-(4x^2y^2 + 4xy^3)$. **36.** $5^{15} < 3^{23}$. *Порада.* $5^{15} = 5 \cdot (5^2)^7$, $3^{23} = 9 \cdot (3^3)^7$.

38. 1) Так; 2), 3) ні. **39.** 1), 2) Ні; 3) так. **40.** $(-1; -1)$ і $(2; -5)$. **41.** 25 %.

42. 1) Ні; 2), 3), 4) так. **43.** Ні. **44.** 1) Один; 2) жодного; 3) один; 4) без-

ліч. **45.** 5 або 10. **46.** 1) Прямі $x = -1$ і $x - 2y = 0$; 2) прямі $x = 0$ і $y = x$;

3) прямі $x = 2$ і $x = -2$; 4) прямі $y = 3$ і $y = -3$; 5) $y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 2x, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases}$

6) пряма $x = 0$ та промені $y = 1$ для $x \geq 0$ і $y = -1$ для $x \leq 0$. **48.** 1) Так;

$(2; 0)$, $(-2; 0)$; 2) так; $(0; 4)$. **49.** $(8; 2)$. **50.** 1) $(3; 0)$; 2) $(0; -5)$. **51.** 69 і 64.

Порада. $\overline{6x} \cdot \overline{6y} = \overline{x6} \cdot \overline{y6}$, звідки $xу = 36$. **52.** У 1990 р. *Порада.* Нехай Олесь народився в $\overline{19ху}$ році. Тоді в 2009 р. йому буде $2009 - \overline{19ху}$, що за умовою дорівнює $(1 + 9 + x + y)$. **53.** $a = 10$. **54.** 1) $m = 2$ – немає розв'язків; $m \neq 2$ – єдиний розв'язок; 2) $m = 3$ – безліч розв'язків; $m \neq 3$ – немає розв'язків; 3) $m = 1$ – безліч розв'язків; $m \neq 1$ – єдиний розв'язок. **55.** $a = -7$. **56.** 1) $x = 5, y = 3, z = 0$. *Порада.* Додати почленно всі рівняння системи; 2) $x = -1, y = 8, z = -3$. **57.** $a = -2; b = -1; -8x^5 + 11x^2 + 11x - 8$. **58.** 1) $(1; 2), (0,6; 2,4)$; 2) $(2; 2), (3; 3), (-1; 2), (-1; 7)$; 3) $(2; 2), (1; -1)$. **59.** 1) $(2; 6)$; 2) $(-4; -8)$; 3) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 4) $(-10; -5)$; 5) $(2; -1)$; 6) $(-3; -3)$. **60.** $a = 52; b = 57,2; c = 44$. **61.** Брату зараз 10 років, сестрі – 6 років. **62.** 46. **63.** 742. **64.** 240 і 360. **65.** 500 кг піску; 420 кг цементу. **66.** 5 см; 15 см; 12 см. **67.** 26 см. **68.** 7 кг першого зливка, 3 кг другого зливка. **69.** 12 км. **70.** 630 л; 840 л. **71.** Швидкість автобуса 45 км/год, таксі – 75 км/год. **72.** Швидкість кожного з автобусів 42 км/год, велосипедистки – 18 км/год. **73.** 4,5 км/год; 16,5 км/год. *Порада.* Якщо x км/год – швидкість туриста, а y км/год – швидкість

велосипедиста, то маємо систему:
$$\begin{cases} 1\frac{5}{6}x = \frac{1}{2}y, \\ 3\frac{1}{3}x + 2y = 48. \end{cases} \quad \mathbf{74. 18 \text{ км/год;}}$$

42 км/год; 72 км/год. *Порада.* Якщо позначити швидкість велосипедистки x км/год, швидкість першого автобуса – y км/год, тоді швид-

кість другого – $\frac{7}{12}y$ км/год. Матимемо систему
$$\begin{cases} 1\frac{1}{3}(x + y) = 120, \\ 2\left(x + \frac{7}{12}y\right) = 120. \end{cases}$$

75. 30 м/с і 20 м/с.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

Завдання Робота	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	Г	Б	Г	В	В	А	Г	Б	Г	В	А	В	1–Б; 2–А; 3–Г
5	Б	А	В	Г	В	А	Г	Б	В	А	Г	Б	1–В; 2–А; 3–Г
6	В	Б	Г	Б	А	Г	Б	А	Б	Б	В	А	1–В; 2–Г; 3–А

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аргумент 60

Властивості рівняння з двома змінними 110, 111

Графік лінійної функції 85

– рівняння $ax + by = c$ 117

– – з двома змінними 116

– функції 73

Графічний спосіб задання функції 75

– – розв'язування систем 124

Залежна змінна 59

Значення функції 60

Коефіцієнти лінійної функції 84

Лінійна функція 84

Лінійне рівняння з двома змінними 110

Незалежна змінна 59

Неповний квадрат різниці 16

– – суми 17

Нуль функції 73

Область визначення функції 60

– значень функції 60

Почленне додавання 141

Пряма пропорційність 86

Рівносильні рівняння з двома змінними 110

– системи рівнянь з двома змінними 134

Рівняння з двома змінними 109

Різниця квадратів 10

– кубів 16

Розв'язок рівняння з двома змінними 109

– системи рівнянь з двома змінними 124

Система рівнянь 123

– лінійних рівнянь з двома змінними 123

Спосіб додавання 140

– підстановки 133

Сума кубів 16

Табличний спосіб задання функції 62

Функція 59

З М І С Т

§ 18. Множення різниці двох виразів на їх суму	3
§ 19. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів	10
§ 20. Сума і різниця кубів	16
§ 21. Застосування кількох способів розкладання многочленів на множники	23
<i>Домашня самостійна робота № 4</i>	<i>32</i>
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 16–21</i>	<i>33</i>
<i>Вправи для повторення розділу 2</i>	<i>34</i>
Головне в розділі 2	48
<i>Про фундаторів математичних олімпіад в Україні</i>	<i>52</i>

Розділ 3. ФУНКЦІЇ

§ 22. Функція. Область визначення та область значень функції. Способи задання функцій. Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів	58
§ 23. Графік функції. Графічний спосіб задання функції	71
§ 24. Лінійна функція, її графік та властивості	83
<i>Домашня самостійна робота № 5</i>	<i>98</i>
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 22–24</i>	<i>101</i>
<i>Вправи для повторення розділу 3</i>	<i>102</i>
Головне в розділі 3	107

Розділ 4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

§ 25. Лінійне рівняння з двома змінними	109
§ 26. Графік лінійного рівняння з двома змінними	115
§ 27. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними та її розв'язок. Розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними графічно	123
§ 28. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки	133

§ 29. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання	140
§ 30. Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь	148
<i>Домашня самостійна робота № 6</i>	155
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 25–30</i>	157
<i>Вправи для повторення розділу 4</i>	159
Головне в розділі 4	166
Завдання для перевірки знань за курс алгебри 7 класу	169
Задачі підвищеної складності	170
<i>Відповіді та поради до вправ</i>	180
<i>Предметний покажчик</i>	189

Відеоуроки автора за темами підручника можна переглянути за посиланням <https://cutt.ly/0w8DhUM4> або QR-кодом.



Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім'я учня/учениці	Клас	Навчальний рік	Оцінка	
				на початку року	в кінці року
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання
ІСТЕР Олександр Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для осіб
з особливими освітніми потребами
(Н 54.1–Н 54.2)
7 клас
(у 2 частинах)

ЧАСТИНА 2

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику використано ілюстративний матеріал з відкритих джерел інтернету,
зокрема сайтів *vecteezy.com*, *depositphotos.com*. Усі матеріали в підручнику
використано з навчальною метою відповідно до законодавства України
про авторське право і суміжні права.

Редактор *Олена Мовчан*
Обкладинка *Олександра Павленка*
Макет, художнє оформлення, комп'ютерна
обробка ілюстрацій *Василя Марущинця*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректор *Алла Кравченко*

Формат 84×108/16. Ум. друк. арк. 20,16. Обл.-вид. арк. 9,57.
Тираж 1667 пр. Вид. № 0048. Зам. № 24-07-0412.

ТОВ «Гене́за», вул. Генерала Алмазова, б. 18/7 (літ. В), офіс 404, м. Київ, 01133, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 7692 від 24.10.2022.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ», вул. Максиміліанівська, 17, м. Харків, 61024, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 6847 від 19.07.2019.